

# Kategoriális magyarázó változók

Ferenci Tamás

tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 12.

## Tartalom

## Tartalomjegyzék

1	Regresszió csak minőségi változóval (ANOVA)	1
2	Regresszió minőségi és mennyiségi magyarázó változóval (ANCOVA)	5

## 1. Regresszió csak minőségi változóval (ANOVA)

### Minőségi változók a regresszióban

- A kérdés, ami mostani kutatásainkat motiválja: hogyan szerepeltethetünk egy *minőségi* (nominális vagy ordinális, szokás kategoriális változónak is nevezni) tulajdonságot, pl. férfi–nő, egészséges–beteg, alapfokú–középfokú–felsőfokú végzettségű stb. egy regressziós modellben
- A regresszió csak számszerű adatokat tud felhasználni → valahogy *kódolni* kell a kategoriális tulajdonság lehetséges értékeit (kimeneteit, csoportjait)
- Eddig csak mennyiségi tulajdonságokkal foglalkoztunk, aminek kódolása triviális volt: a naturáliában kifejezett értékével ( $m^2$ , eFt stb.)
- Pl. férfi = 0, nő = 1 elég kézenfekvő, de mi van az iskolai végzettséggel?
- Az alap = 0, közép = 1, felső = 2 belekódolja az adatokba, hogy a felső és a közép közti különbség *kénytelen* ugyanakkora lenni, mint a közép és alap közötti (ha felső = 3, akkor kétszer akkora stb.)
- De mi semmi ilyet nem akarunk, hiszen azt szeretnénk, hogy ezt az adatok mondják meg!

## Dummy változó fogalma

- A kódolást megvalósíthatjuk olyan változóval vagy változókkal, melyek *csak* 0 vagy 1 értéket vehetnek fel
- Az ilyen változókat nevezzük dummy (bináris vagy indikátor) változónak
- Ha két kimenet van, akkor a kódolás teljesen kézenfekvő: egy dummy változóra van szükségünk, mely (például) 0 értéket vesz fel férfira, 1-et nőre
- Bonyolultabb a helyzet, ha több kimenet van

	$D_A$	$D_B$	$D_C$
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1

- Triviális kódolás:

## Kódolás

Ezen „kódolási tábla” alapján a kódolás (pl.  $X_1$ : jövedelem,  $X_2$ : iskolai végzettség,  $X_3$ : életkor):

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 213 & B & 32 \\ 1 & 311 & C & 41 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 128 & B & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} X_1 & D_A & D_B & D_C & X_3 \\ 1 & 213 & 0 & 1 & 0 & 32 \\ 1 & 311 & 0 & 0 & 1 & 41 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 128 & 0 & 1 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Itt már minden tisztán numerikus, működhet a regresszió

## Referencia-kódolás

- ...ám vegyük észre, hogy 3 csoporthoz *nem* kell 3 dummy változó, kódolható 2-vel is!
- Általában  $k$  kimenet kódolása megoldható  $k-1$  dummy változóval az ún. referencia-kódolás logikájával
- Itt kiválasztunk egy kimenetet, aminél mind a  $k-1$  darab dummy változó 0 értéket vesz fel (kontrollcsoport vagy referenciacsoport), és a többi  $k-1$  csoportot az jelzi, hogy a  $k-1$  dummy változó közül *melyik* vesz fel 1 értéket (mindig csak 1!)

	$R_A$	$R_B$
A	1	0
B	0	1
C	0	0

- Például (3 kimenetre):

- Itt C a referenciacsoport,  $R_A$  és  $R_B$  a két szükséges (ugye  $k = 3!$ ) magyarázó változó
- Vegyük észre, hogy  $R_A \equiv D_A$  és  $R_B \equiv D_B$  (tehát a két kódoláshoz pontosan ugyanazon dummykra van szükség, csak a referencia-kódolásnál eldobjuk az egyiket – ez lesz a kontrollcsoport)

### Dummy változó csapda

- Ha van konstans a modellben, akkor *tilos* is  $k$  csoporthoz  $k$  dummyt használni a kódoláshoz
- Ellenkező esetben egzakt multikollinearitás jön létre (gondoljuk végig, hogy a dummy változókhöz mi tartozik a design mátrixban, ld. előbb!); ez az ún. *dummy változó csapda*
- Ha  $k$  csoportot mégis  $k$  dummyval kódolunk („triviális kódolás”), akkor viszont nem szerepeltethetünk konstans

### Triviális kódolás konstans nélkül

- A két kódolási mód ( $k$  darab dummy, nincs konstans és  $k - 1$  darab dummy, van konstans) jól szemléltethető egy csak a nominális tulajdonsággal magyarázó regresszióval
- $k$  darab dummy, nincs konstans:

	$D_A$	$D_B$	$D_C$
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1

$$Y = \beta_A D_A + \beta_B D_B + \beta_C D_C + \varepsilon$$

- Együtthatók értelmezése: ha az A csoportban vagyunk, akkor a fenti egyenlet  $Y = \beta_A + \varepsilon$  lesz  $\Rightarrow \beta_A$  az A csoport csoportátlaga (legkisebb négyzetes elv!); hasonlóan a többi

### Referencia-kódolás konstanssal

- $k - 1$  darab dummy, van konstans:

	$D_A$	$D_B$
A	1	0
B	0	1
C	0	0

$$Y = \beta^* + \beta_A^* D_A + \beta_B^* D_B + \varepsilon$$

### Együtthatók értelmezése referencia-kódolásnál

- Értelmezésnél egy dolgot tartsunk mindig szem előtt: ugyanarra a csoportra ugyanannak az értéknek kell kijönnie, akárhogy kódolunk!
- Így  $\beta_C = \beta^*$
- Továbbá (a  $B$  csoport példáján):

$$\beta_B = \beta^* + \beta_B^* = \beta_C + \beta_B^* \Rightarrow \beta_B^* = \beta_B - \beta_C$$

- Tehát az együtthatók az *eltéréseket* jelentik a referenciacsoporttól (ami pedig a konstansba kerül)
- Vegyük észre, hogy a változónkénti szignifikanciák eltérhetnek (mert másra fognak vonatkozni), de az előrejelzése – és így a modellminősítő mutatók – nem

### Fontos hipotézisvizsgálatok

- Egyrészt: szignifikáns-e egy adott csoport átlagának eltérése a referenciacsoport átlagától
- Ez itt nem más, mint  $\beta_A^*$  vagy  $\beta_B^*$  relevanciája
- Egyszerűen  $t$ -próbával ellenőrizhető!
- Másrészt: van-e egyáltalán bármilyen csoportok közötti eltérés:

$$H_0 : \beta_A^* = \beta_B^* = \dots = 0$$

$$H_1 : \exists j : \beta_j^* \neq 0$$

- Több csoport átlaga eltér-e? De hát az az ANOVA!
- Az egyezés nem pusztán formai, teljes tartalmazi egyezés van (ez nem csak hasonló, hanem ugyanaz: az ANOVA elmondása regressziós „keretben”)

### Egynél több kategoriális magyarázó változó

- Ha egynél több kategoriális magyarázó változó van, akkor nem kódolható mind-egyik triviálisan, ilyenkor már a konstans eltávolítása sem segít
- (Nem az lesz a baj, hogy valamelyik összege a konstans, hanem, hogy a kettő összege ugyanaz – ez elvileg is megoldhatatlan)
- Referencia-kódolás minden további nélkül használható
- A kétszemponos ANOVA megfelelője regressziós keretben!
- Természetesen feltételezhető interakció is, ez esetben a dummy-kat az összes lehetséges kombinációban szorozni kell

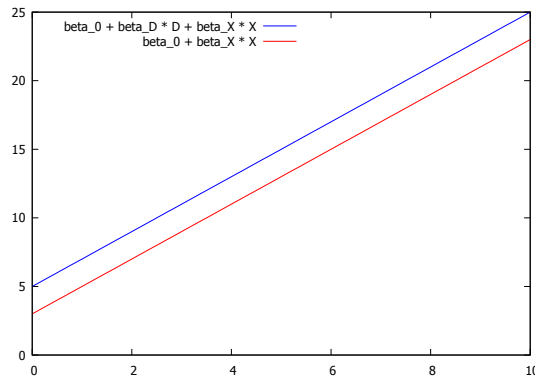
## 2. Regresszió minőségi és mennyiségi magyarázó változóval (ANCOVA)

### Dummyszás folytonos magyarázó változó jelenléte mellett

- Amit eddig csináltunk az lényegében az volt, amit *konstans dummyszásának* nevezhetünk: csoportonként eltérő (de konstans) értékkel becsültük az eredményváltozót
- Mi van, ha bevonunk egy magyarázó változót?
- Azaz ekkor már nem egy konstans becsülünk az egyes csoportokra, hanem egy egyenest (a folytonos magyarázó változó függvényében)
- Dummyszással (tehát a csoporttagság szerint) eltéríthetjük az egyenesek tengelymetszetét és meredekségét is!
- Lehet csoportonként különböző
  1. +1 egység magyarázó változó hatása
  2. a 0 magyarázó változóhoz tartozó eredményváltozó
- E feladat neve: ANCOVA

### Eltérő tengelymetszet

Ha csak a tengelymetszetet térítjük el (+1 egység magyarázó változó hatása ugyanaz minden csoportban, de nem ugyanannyi a 0 magyarázó változóhoz tartozó eredményváltozó):

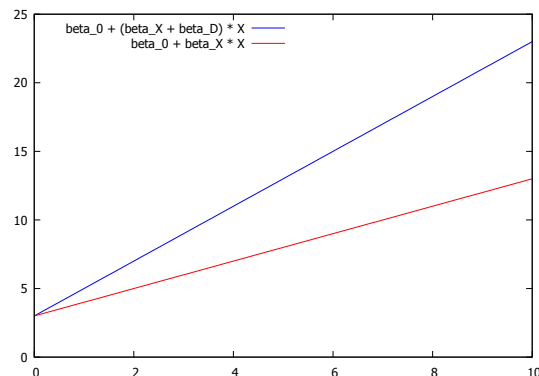


Algebrailag:

$$Y = \beta_0 + \beta_D D + \beta_X X + \varepsilon$$

### Eltérő meredekség

Ha csak a meredekséget térítjük el (0 magyarázó változóhoz ugyanaz az eredményváltozó tartozik, de +1 egység magyarázó változó hatása csoportonként eltérő):



Algebrailag:

$$Y = \beta_0 + (\beta_X + \beta_D D) X + \varepsilon$$

### Eltérő tengelymetszet és meredekség

- Akár a tengelymetszet és a meredekség is lehet különböző
- Ahogy előbb láttuk, csak a módszereket kell kombinálni: a konstans és a meredekséget is megdummyzzuk:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon,$$

de úgy, hogy  $\beta_1 = \alpha + \alpha_A D_A + \alpha_B D_B$  és  $\beta_2 = \gamma + \gamma_A D_A + \gamma_B D_B$

- Nagyon fontos észrevenni, hogy a meredekség dummyzása a dummy és a mennyiségi változó közti interakcióra vezet:

$$Y = \alpha + \alpha_A D_A + \alpha_B D_B + \gamma X + \gamma_A (D_A X) + \gamma_B (D_B X) + \varepsilon$$

- Logikus is: az egyik változó (folytonos) hatása eltér a szerint, hogy a másik változónak (kategorialis) mi a szintje: különböző meredekségek
- Avagy fordítva elmondva (egyenértékűen, hiszen az interakció ugye szimmetrikus): az egyik változó (kategorialis) hatása eltér a szerint, hogy a másik változónak (folytonos) mi a szintje: az egyenesek közti különbség függ attól, hogy hol nézzük

## Eltérő tengelymetszet és meredekség

- De hát ez megoldható a minta szétszedésével is!
- A két módszer – természetesen – ugyanarra az eredményre vezet
- A dummyzás mégis jobb a minta szétszedésénél; vajon miért?
  - Messzemenően több lehetőségünk van a dummyzott (egybenlévő) modellel → gazdaságilag releváns hipotézisek vizsgálhatóak egyszerűen (ld. mindjárt)

## Hipotézisvizsgálat a dummyzott modellben

- Pl.: van-e egyáltalán bármilyen eltérés a csoportok között? (Értsd: eltér-e a becült egyenes (bármilyen szempontból) a csoportok között, vagy mindegyikben teljesen ugyanaz?)
- Ez az ún. *strukturális törés*, hipotézispárja:  $H_0 : \alpha_A = \alpha_B = \gamma_A = \gamma_B = 0$ ,  $H_1$ : valamelyik ezek közül nem nulla, tehát van strukturális törés
- És most jön a szép rész: ha a fenti modellt megbecsültük (sima OLS-sel), akkor ez a hipotézis egyszerűen egy közösleges Wald- (vagy hasonló) próbát jelent!
- Hasonlóképp: nem lehet, hogy csak a tengelymetszetek eltérőek? → ez az ún. *párhuzamos ráták* hipotézise,  $H_0 : \gamma_A = \gamma_B = 0$ ; szintén Wald-teszttel elintézhető
- Minden hasonló, gazdasági kérdés *lefordítható* ökonometriailag, például változó vagy változók relevanciájának tesztelésére

## Kontraszt-kódolás

- Kontraszt-kódolás: trükkös kódolás úgy kitalálva, hogy a dummy-k együtthatója ne a referencia-csoporthoz, hanem az átlaghoz képesti eltérést jelentse

	$C_A$	$C_B$
A	1	0
B	0	1
C	-1	-1

- A megoldás:
- (A dummy változó nem 0 és 1 értéket vehet csak fel)
- Miért fog ez működni?

## Kontraszt-kódolás

Mert:

$$\beta_0 + \beta_{C_A} + 0 = \bar{y}_A \quad (1)$$

$$\beta_0 + 0 + \beta_{C_B} = \bar{y}_B \quad (2)$$

$$\beta_0 - \beta_{C_A} - \beta_{C_B} = \bar{y}_C \quad (3)$$

És így:

- $(1)+(2)+(3) \Rightarrow 3\beta_0 = \bar{y}_A + \bar{y}_B + \bar{y}_C \Rightarrow \beta_0$  tényleg a főátlag (ha azonosak a csoportok elemszámai! különben ún. súlyozott kontraszt kellene, ahol a dummy változók már nem is feltétlenül egész értékeket vennének fel)
- $(2)+(3) \Rightarrow 2\beta_0 - \beta_{C_A} = \bar{y}_B + \bar{y}_C \Rightarrow \beta_{C_A} = 2\beta_0 - (\bar{y}_B + \bar{y}_C) = 2\beta_0 - (3\beta_0 - \bar{y}_A) \Rightarrow \beta_{C_A} = \bar{y}_A - \beta_0 \Rightarrow$  tényleg az átlagtól való eltérés (és hasonlóan a másik)

## Egy terminológiai megjegyzés

- Az angol irodalomban az általunk kontrasztkódolásnak nevezett módszert nagyon gyakran „effect coding”-nak nevezik...
- ...a kontraszt pedig az, amikor a csoportok tetszőleges – általunk meghatározott – lineáris kombinációját teszteljük