

# A homoszkedaszticitás és sérülése

Ferenci Tamás  
tamas.ferenci@medstat.hu

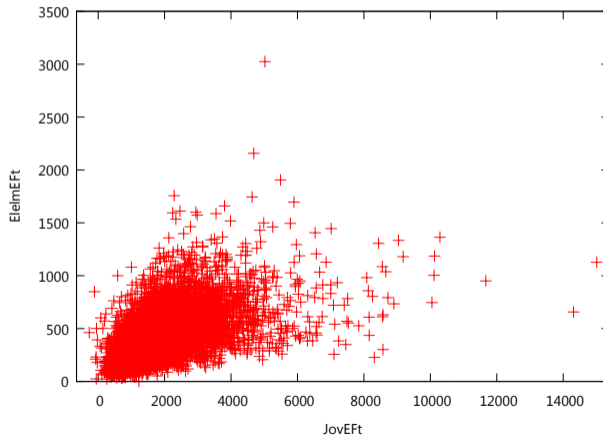
Utoljára frissítve: 2023. május 12.

# Tartalom

- 1 A heteroszkedaszticitás és következményei
- 2 A heteroszkedaszticitás tesztelése
- 3 A heteroszkedaszticitás kezelése

## Példa a heteroszkedaszticitásra

Először próbáljunk szemléletes képet kapni a heteroszkedaszticitásról:



## Emlékeztetőül

- A feltétel:  $\sigma_i^2 := \mathbb{D}^2(\varepsilon_i | \underline{X}) = \sigma^2$   $i$ -től függetlenül minden  $i = 1, 2, \dots, n$
- Vagy, ezzel egyenértékűen:  $\mathbb{E}(\varepsilon_i^2 | \underline{X}_i) = \sigma^2$

# A heteroszkedaszticitás okai

A heteroszkedaszticitás oka lehet:

- 1 A jelenség természetes velejárója (ld. az élelmiszerfogyasztás, vagy általában a kiadások példáját: „bővülő lehetőségek az ízlés kiélésére”)
- 2 Csoportosított adatok használatakor: például háztartásonként átlagoljuk a jövedelmet és az élelmiszerekre fordított kiadást  $\rightarrow$  még ha egy háztartástag szintjén állandó  $\sigma^2$  is a szórásnégyzet, a csoportosított adatokban ez  $\sigma^2/n_i$  lesz, ahol  $n_i$  az  $i$ -edik háztartás létszáma, ami nagyon is eltérő lesz háztartásról-háztartásra (azaz megfigyelési egységként)

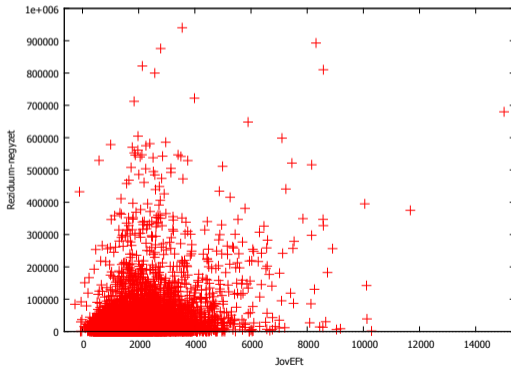
## Heteroszkedaszticitás következményei

Mi történik, ha a heteroszkedaszticitással nem törődve, továbbra is a szokásos OLS-t alkalmazzuk a becslésre?

- Ahogy láttuk, az OLS szolgáltatott paraméter-becslések továbbra is torzítatlanok és konzisztensek lesznek...
- ...de már nem lesz hatásos (elveszíti a BLUE-ságot) → lesz olyan lineáris torzítatlan becslés, aminek kisebb a varianciája
- Ráadásul a becsült standard hibák (illetve általában a paraméterek becsült kovariancia-mátrixa) még torzított és inkonzisztens is lesz!
- A  $t$ - és  $F$ -statisztikáknak még aszimptotikusan sem lesz  $t$ -, illetve  $F$ -eloszlásuk
- Azaz a tesztek és a paraméterekre adott konfidencia-intervallumok érvényüket veszítik
- Az előrejelzések torzítatlanok lesznek ugyan, de nem hatásosak

## Grafikus módszerek

- Nem analitikus, de benyomás-szerzésre jó lehet
- Reziduum-négyzetek kiplottolása különféle magyarázóváltozókkal (vagy a becsült eredményváltozóval) szemben:



## Goldfeld–Quandt (GQ) próba

- Alapötlet: rendezzük a mintát azon magyarázó változó szerint, ami mentén nem állandó a feltételes szórás (az előbbi példán mondjuk a jövedelem), vágjuk szét három részre a mintát eszerint (kis, közepes és nagy értékű  $e$  változó), és hasonlítsuk össze ( $F$ -próbával) az alsó és a felső régióban a szórást
- Előnye: egyszerű, intuitív, könnyen átlátható
- Hátrányai:
  - Tudni kell, hogy mely változó mentén nem állandó a szórás (és muszáj, hogy egyetlen ilyen mutassunk)
  - Csak akkor jó, ha  $e$  változó mentén monoton módon változik a szórás
  - Gazdaságtalan, nem használ fel minden információt a mintából (a középső részt egyszerűen kidobja a kukába!)



## LM-próbák

- Mi volna, ha a modell paramétereinek tekintenénk, hogy az  $i$ -edik megfigyelési egységnél mekkora a  $\sigma_i^2$  feltételes variancia?
- Önmagában nyilván rossz ötlet: lehetetlen lesz megbecsülni, hiszen minden paraméterre csak egyetlen megfigyelésünk (az  $\hat{u}_i^2$  reziduum-négyzet) lesz
- De: egyszerűsítsük a struktúráját! Azaz: feltételezzünk egy kevesebb paraméterre redukált formát, mely meghatározza a feltételes szórást

## LM-próbák

- Tehát: van elképzelés, hogy mely változók „felelősek” potenciálisan a heteroszkedaszticitásért, melyek mozgatják a hibatag szórását → rakjunk erre egy (lineáris regressziós) modellt; pár lehetséges példa erre:

$$\sigma_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_P Z_{iP} + e_i$$

$$\sigma_i = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_P Z_{iP} + e_i$$

$$\ln(\sigma_i^2) = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_P Z_{iP} + e_i$$

- Itt  $Z_i$ -k ismert változók, melyek körét mi határozzuk meg, mint amik „felelhetnek” a nem-állandó szórásért (ezek természetesen részben vagy egészben magyarázó változók is lehetnek az eredeti regresszióban)
- A  $\sigma_i$  feltételes szórás helyébe annak a becslőjét, az  $|\hat{u}_i|$  reziduumot írjuk a segédregresszióban

## LM-próbák

- Akkor nincs heteroszkedaszticitás, ha a segédregresszióban teljesül a  $H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_p = 0$  nullhipotézis (hiszen ekkor a  $\sigma_i$  speciálisan állandó lesz, nekünk épp ez kellett)
- Ezt ún. LM-elven vizsgáljuk (részletesen lásd később), a lényeg, hogy az erre irányuló próba:

$$LM_{\text{emp}} = nR^2 \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{p-1}^2,$$

ahol  $R^2$  természetesen a segédregresszió többszörös determinációs együtthatója

- A fenti modellekhez tartozó próbák nevei rendre: Breusch–Pagan-próba, Glejser-próba, Harvey–Godfrey-próba (ún. multiplikatív heteroszkedaszticitásra)
- (Valójában a próbák eredetileg kicsit más alakúak, de nagy mintán egységesen a fenti formára hozhatóak)

# LM-próbák

- Előnyeik:
  - Ezek már minden információt felhasználnak
  - Nem muszáj, hogy a heteroszkedaszticitásért egyetlen változó legyen felelős
- Hátrányaik:
  - Továbbra is nekünk kell tudnunk, hogy mely változó(k) felelős(ek) a nem-állandó szórásért
  - Hibanormalitást igényelnek és erre érzékenyek

## Breusch–Pagan (BP) próba

- Még egyszer, a segédregressziója:

$$\widehat{u}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_P Z_{iP} + e_i$$

- (Valójában a jobb oldal helyett egy  $f(\alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_P Z_{iP})$  transzformáltat is tekinthetnénk valamilyen  $f$  függvénnyel, a próba végeredménye ugyanis beláthatóan ugyanaz lesz, ez tehát erre általánosodik)
- A hibanormalitásra robusztusabb változata: Koenker-próba

# White-teszt

- Az összes eddigi tesztnek még mindig hátránya, hogy tudni kell, hogy mi mozgatja a heteroszkedaszticitást
- A White-próba ötlete: ha nincs ötletünk, használjunk „mindent”, ami a változóinkból kinyerhető (a valódi ok inkább az, hogy a homoszkedaszticitási feltétel gyengíthető arra, hogy az interakciókkal és a kvadratikus hatásokkal nincs összefüggése  $\varepsilon^2$ -nek)
- Minden: az összes magyarázó változó, az összes interakció, az összes kvadratikus hatás (persze csak ahol van értelme)
- Innentől olyan, mint a BP-próba
- Nagy mintás
- További előnye, hogy a hibanormalitásra sem annyira érzékeny
- Hátránya: itt is érvényesül a „minél kevesebb előfeltevésre épít egy próba, annál gyengébb” elv (itt szemléletesen: nagyon megnő a segédregresszióban a magyarázó változók száma) → ha van *a priori* információnk, használjuk! (itt: ha ismerjük, mi felel a heteroszkedaszticitásért, erősebb a BP-próba)

## Modellspecifikáció változtatása

- Ötlet: úgy módosítjuk a modellspecifikációt, hogy az új specifikációban szereplő hiba már ne legyen heteroszkedasztikus
- Nem-statisztikai jellegű korrekció: szakmai ismeretet (is) igényel arról, hogy vajon mi a jó módosított specifikáció
- Nem is univerzális (nem feltétlenül alkalmazható minden esetben)
- Például:
  - Logaritmálás (ld. a nemlinearitásokról szóló részt a 6. fejezetben)
  - „Deflálás” (áttérés valamilyen méret-jellegű mutatóra leosztott változóra, pl. népességről népsűrűségre)

## Heteroscedasticity Consistent Covariance Matrix, HCCM

- Ötlet: a becült értékek torzítatlanok, azokat hagyjuk békén: maradjanak ugyanazok, mint a heteroszkedaszticitás figyelmen kívül hagyásával becült modellben
- A standard hibákkal kéne valamit kezdeni
- HCCM nevű eljárás képes ezeket korrigálni: robusztus (vagy Huber–White–Eicker) standard hibák
- Matematikai részletekkel nem törődünk



## Heteroscedasticity Consistent Covariance Matrix, HCCM

- Univerzálisan működőképes, nem igényel semmilyen feltevést a heteroszkedaszticitás struktúrájáról (legalábbis nagy mintán: itt emiatt gyakran automatikusan robusztus standard hibát adnak meg, esetleg mindkét standard hibát)
- Viszont ha fennáll a homoszkedaszticitás, akkor jobban járunk a szokásos standard hibával, mert annak a kismintás viselkedése is garantált (már csak ezért is érdekes a tesztelés)
- Alapozható rá más teszt is, nem csak a  $t$ -próba

## Általánosított legkisebb négyzetek módszere (GLS)

- Ez már a teljes modellt újrabecsüli: a becsült koefficiensek is mások lesznek
- Alapötlet: a hibák kovarianciamátrixa nem skalármátrix  $\rightarrow$  semmi baj, feltételezzünk egy általánosabb mátrixot, és számoljuk azzal végig a legkisebb négyzetes becslést
- Matematikai részletek nélkül a végeredmény:

$$\widehat{\beta}_{\text{GLS}} = \left( \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{y},$$

ahol  $\mathbf{\Omega}$  a – teljesen általános – feltételes kovarianciamátrix:  $\mathbf{\Omega} = \mathbb{E} \left( \underline{UU}^T \mid \underline{X} \right)$

- A baj, hogy ez önmagában csak akkor alkalmazható, ha ismerjük ezt a  $\mathbf{\Omega}$  mátrixot, azaz az egyes – feltételes – szórásokat

## Súlyozott legkisebb négyzetek módszere (WLS)

- Van gyakorlati példa arra, amikor – legalábbis konstans szorzó erejéig – ismerjük a feltételes szórásokat: ha tudjuk, hogy azok mely változóval arányosak
- Például: fogyasztási egységek számával arányos a feltételes szórás:  $\sigma_i = \sigma \cdot F_i$  (a fogyasztási egységek  $F_i$  száma minden megfigyelési egységre ismert)
- Ennyi (tehát a konstans szorzó erejéig ismert feltételes szórás) már elég: ha

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

heteroszkedasztikus is, a

$$\frac{Y_i}{\sqrt{F_i}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{F_i}} + \beta_2 \frac{X_{i2}}{\sqrt{F_i}} + \dots + \beta_k \frac{X_{ik}}{\sqrt{F_i}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{F_i}}$$

könnyen belátható, hogy nem lesz az

## Súlyozott legkisebb négyzetek módszere (WLS)

- Ez az ún. súlyozott legkisebb négyzetek módszere (WLS, weighted least squares); nem keverendő össze a megfigyelési egységek súlyozásával (erre is látni fogunk példát)
- Fontos, hogy a súlyok *nem* becslésből származtak, hanem ismertek voltak (ld. a fogyasztási egységek példáját)
- Természetesen egy változónál több is felhasználható (fogyasztási egységek száma és település stb.), hogy leírjuk a  $\sigma_i$ -t és a függvényforma is lehet akármilyen bonyolult (fogyasztási egységek négyzetével arányos feltételes szórás stb.), a lényeg, hogy olyan kifejezést konstruáljunk *kizárólag* ismert változókból, mellyel egyenesen arányos lesz a feltételes szórás
- A kulcs az, hogy visszaredukáljuk egyetlen ismeretlen paraméterre a feltételes szórásokat (ugyanúgy, ahogy homoszkedaszticitásnál lenne)

## Kivitelezhető általánosított legkisebb négyzetek módszere (FGLS)

- Ha nem ismert a heteroszkedaszticitás struktúrája, akkor más megoldás kell, hogy a gyakorlatban alkalmazható legyen a GLS
- Egy segédregresszióban az eredeti regresszió reziduumainak négyzeteit regresszáljuk ki a White-tesztnél látott módon, innen kapjuk a hiba becsült varianciáit
- Ezek felhasználásával egy súlyozott regressziót számítunk, amivel újra közelítjük a hibák varianciáit
- Így nyerünk – ismert struktúra nélkül is – becslést a feltételes szórásra, amit az alapregresszióban a WLS-hez hasonló módon alkalmazhatunk a heteroszkedaszticitás korrigálására
- (A segédregresszióban reziduum-négyzet helyett mást is alkalmazhattunk volna, ahogy a heteroszkedaszticitásra irányuló LM-próbáknál is volt)