

# Késleltetési operátor és polinom, ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinommal, az ARMA-folyamatok stacionaritása

Ferenci Tamás  
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 12.

# Tartalom

- 1 Matematikai emlékeztető
  - Algebra emlékeztető
  
- 2 Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája
  - A késleltetési operátor és a késleltetési polinom
  - ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

# Tartalom

## 1 Matematikai emlékeztető

- Algebra emlékeztető

## 2 Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája

- A késleltetési operátor és a késleltetési polinom
- ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

# Tartalom

- 1 Matematikai emlékeztető
  - Algebra emlékeztető
- 2 Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája
  - A késleltetési operátor és a késleltetési polinom
  - ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

# Változó, hatvány, polinom, polinom gyöke és inverze

- Legyen  $x$  egy változó,  $x^k$  egy hatványa, ekkor  $\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots + \omega_k x^k = \omega(x)$  egy  $k$ -ad fokú, egyváltozós – polinom,  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  együtthatókkal
- (Az együtthatók és a változó értéke legegyszerűbb esetben valós számok, de ez nem szükségszerű)
- Megengedjük, hogy a fokszám végtelen is lehessen:  $\omega(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i x^i$
- Polinom inverze:  $\omega^{-1}(x)$  olyan, hogy  $\omega^{-1}(x)\omega(x) = 1$
- Polinom gyöke: az  $\omega(x) = 0$  egyenlet megoldása
- Az algebra alaptétele: egy  $k$ -ad fokú valós polinomnak  $k$  darab – nem feltétlenül különböző – gyöke van, melyek vagy valósak, vagy ha komplexek, akkor konjugált párokban jönnek
- Az előbbi miatt egy polinom mindig felírható úgy – gyöktényezős alak – mint  $\omega(x) = \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right) \left(1 - \frac{1}{r_2}x\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)$ , ahol  $r_i$  az  $i$ -edik gyök

# Polinom invertálása

- Például  $1 - ax$  inverze  $1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \dots$  (egyesével egyeztetve az együtthatókat)
- Ez egy hatványsor, konvergál, ha  $|ax| < 1$
- Általános esethez induljunk ki a gyöktényező alakból:

$$\begin{aligned}\omega^{-1}(x) &= \left[ \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right) \left(1 - \frac{1}{r_2}x\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r_k}x\right) \right]^{-1} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{r_2}x\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)^{-1} = \\ &= \prod_{i=1}^k \left[ 1 + \frac{1}{r_i}x + \left(\frac{1}{r_i}x\right)^2 + \left(\frac{1}{r_i}x\right)^3 + \dots \right]\end{aligned}$$

- Ami konvergál, ha minden  $i$ -re  $\left|\frac{1}{r_i}x\right| < 1$ 
  - Ha  $|x| = 1$ , akkor a feltétel, hogy  $|r_i| > 1$ , azaz, hogy mindegyik gyök 1-nél nagyobb abszolútértékű legyen, más szóval, hogy a komplex egységkörön kívül legyen (ugye a gyökök komplexek is lehetnek)

# Tartalom

- 1 Matematikai emlékeztető
  - Algebra emlékeztető
- 2 Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája
  - A késleltetési operátor és a késleltetési polinom
  - ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

# Tartalom

- 1 Matematikai emlékeztető
  - Algebra emlékeztető
  
- 2 Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája
  - A késleltetési operátor és a késleltetési polinom
  - ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal



# A késleltetési operátor

- Legyen  $L$  valami, ami idősróból egy másik idősort csinál (ha  $y$  az eredeti idősor, akkor  $Ly$  jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy  $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre
- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel:  
 $y : \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $y : t \mapsto y_t$
- Az  $L$  tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

# A késleltetési operátor

- Legyen  $L$  valami, ami idősből egy másik idősort csinál (ha  $y$  az eredeti idősor, akkor  $Ly$  jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy  $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre
- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel:  
 $y : \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $y : t \mapsto y_t$
- Az  $L$  tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

# A késleltetési operátor

- Legyen  $L$  valami, ami idősróból egy másik idősort csinál (ha  $y$  az eredeti idősor, akkor  $Ly$  jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy  $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre
- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel:  
 $y : \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $y : t \mapsto y_t$
- Az  $L$  tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

# A késleltetési operátor

- Legyen  $L$  valami, ami idősből egy másik idősort csinál (ha  $y$  az eredeti idősor, akkor  $Ly$  jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy  $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre
- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel:  
 $y : \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $y : t \mapsto y_t$
- Az  $L$  tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

# A késleltetési operátor

- Legyen  $L$  valami, ami idősróból egy másik idősort csinál (ha  $y$  az eredeti idősor, akkor  $Ly$  jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy  $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre
- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel:  
 $y : \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $y : t \mapsto y_t$
- Az  $L$  tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

# A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ( $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_T)^T$ )
- (Ez rendben is van: egy  $n$  dimenziós valós vektor felfogható egy  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az  $n$ -dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

# A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ( $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_T)^T$ )
- (Ez rendben is van: egy  $n$  dimenziós valós vektor felfogható egy  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az  $n$ -dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

# A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ( $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_T)^T$ )
- (Ez rendben is van: egy  $n$  dimenziós valós vektor felfogható egy  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az  $n$ -dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!



# A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ( $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_T)^T$ )
- (Ez rendben is van: egy  $n$  dimenziós valós vektor felfogható egy  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az  $n$ -dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

# A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ( $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_T)^T$ )
- (Ez rendben is van: egy  $n$  dimenziós valós vektor felfogható egy  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az  $n$ -dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

# A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ( $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_T)^T$ )
- (Ez rendben is van: egy  $n$  dimenziós valós vektor felfogható egy  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az  $n$ -dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

# A késleltetési operátor (precízebben)

- Ha a vektoros felfogást, és azon belül is az  $n$ -dimenziós valós vektoroknak való megfeleltetést vesszük, akkor minden operátor reprezentálható mátrixszal (hiszen a mátrix az, ami vektorból vektort csinál!)
- Ez alól a késleltetési operátor sem kivétel, például:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

- (Azért, hogy ne változzon az idősor hossza, az új első eleme legyen fixen 0)

# A késleltetési operátor (precízebben)

- Ha a vektoros felfogást, és azon belül is az  $n$ -dimenziós valós vektoroknak való megfeleltetést vesszük, akkor minden operátor reprezentálható mátrixszal (hiszen a mátrix az, ami vektorból vektort csinál!)
- Ez alól a késleltetési operátor sem kivétel, például:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

- (Azért, hogy ne változzon az idősor hossza, az új első eleme legyen fixen 0)

# A késleltetési operátor (precízebben)

- Ha a vektoros felfogást, és azon belül is az  $n$ -dimenziós valós vektoroknak való megfeleltetést vesszük, akkor minden operátor reprezentálható mátrixszal (hiszen a mátrix az, ami vektorból vektort csinál!)
- Ez alól a késleltetési operátor sem kivétel, például:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

- (Azért, hogy ne változzon az idősor hossza, az új első eleme legyen fixen 0)

# A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda  $L^2$ ?
  - Könnyen értelmezhető:  $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
  - Röviden:  $L^2y_t = y_{t-2}$
  - Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az  $L$  mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz  $L^2 = L^2$
  - Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
  - Hasonlóan  $L^k y_t = y_{t-k}$ , tehát ez a  $k$ -val késleltető operátor lesz
  - (Ideértve azt is, hogy például  $L^{-1}y_t = y_{t+1}$ , „siettető operátor”)

# A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda  $L^2$ ?
- Könnyen értelmezhető:  $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden:  $L^2y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az  $\mathbf{L}$  mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz  $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan  $L^k y_t = y_{t-k}$ , tehát ez a  $k$ -val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például  $L^{-1}y_t = y_{t+1}$ , „siettető operátor”)



# A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda  $L^2$ ?
- Könnyen értelmezhető:  $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden:  $L^2y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az  $\mathbf{L}$  mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz  $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan  $L^k y_t = y_{t-k}$ , tehát ez a  $k$ -val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például  $L^{-1}y_t = y_{t+1}$ , „siettető operátor”)

# A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda  $L^2$ ?
- Könnyen értelmezhető:  $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden:  $L^2y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az  $\mathbf{L}$  mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz  $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan  $L^k y_t = y_{t-k}$ , tehát ez a  $k$ -val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például  $L^{-1}y_t = y_{t+1}$ , „siettető operátor”)

# A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda  $L^2$ ?
- Könnyen értelmezhető:  $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden:  $L^2y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az  $\mathbf{L}$  mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz  $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
  - Hasonlóan  $L^k y_t = y_{t-k}$ , tehát ez a  $k$ -val késleltető operátor lesz
  - (Ideértve azt is, hogy például  $L^{-1}y_t = y_{t+1}$ , „siettető operátor”)

# A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda  $L^2$ ?
- Könnyen értelmezhető:  $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden:  $L^2y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az  $\mathbf{L}$  mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz  $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan  $L^k y_t = y_{t-k}$ , tehát ez a  $k$ -val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például  $L^{-1}y_t = y_{t+1}$ , „siettető operátor”)

# A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda  $L^2$ ?
- Könnyen értelmezhető:  $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden:  $L^2y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az  $\mathbf{L}$  mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz  $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan  $L^k y_t = y_{t-k}$ , tehát ez a  $k$ -val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például  $L^{-1}y_t = y_{t+1}$ , „siettető operátor”)

# A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például

$$2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2y_t = \dots$$

- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\dots = (2 + 3L - 4L^2) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását:  $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$  épp az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra pont  $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2}$ -t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1 L + \omega_2 L^2 + \dots + \omega_k L^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárthatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel  $\omega(L) y_t = \omega_0 y_t + \omega_1 y_{t-1} + \omega_2 y_{t-2} + \dots + \omega_k y_{t-k}$
- Természetesen  $\omega(L)$  maga is egy operátor

# A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például  
 $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2y_t = \dots$
- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\dots = (2 + 3L - 4L^2) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását:  $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$  épp az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra pont  $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2}$ -t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1 L + \omega_2 L^2 + \dots + \omega_k L^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárthatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel  $\omega(L) y_t = \omega_0 y_t + \omega_1 y_{t-1} + \omega_2 y_{t-2} + \dots + \omega_k y_{t-k}$
- Természetesen  $\omega(L)$  maga is egy operátor

# A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például  
 $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2y_t = \dots$
- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\dots = (2 + 3L - 4L^2) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását:  $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$  épp az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra pont  $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2}$ -t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1 L + \omega_2 L^2 + \dots + \omega_k L^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárthatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel  $\omega(L) y_t = \omega_0 y_t + \omega_1 y_{t-1} + \omega_2 y_{t-2} + \dots + \omega_k y_{t-k}$
- Természetesen  $\omega(L)$  maga is egy operátor



# A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például

$$2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2y_t = \dots$$

- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\dots = (2 + 3L - 4L^2) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását:  $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$  épp az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra pont  $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2}$ -t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1L + \omega_2L^2 + \dots + \omega_kL^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárthatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel  $\omega(L)y_t = \omega_0y_t + \omega_1y_{t-1} + \omega_2y_{t-2} + \dots + \omega_ky_{t-k}$
- Természetesen  $\omega(L)$  maga is egy operátor

# A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például

$$2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2y_t = \dots$$

- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\dots = (2 + 3L - 4L^2) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását:  $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$  épp az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra pont  $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2}$ -t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1L + \omega_2L^2 + \dots + \omega_kL^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárthatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel  $\omega(L)y_t = \omega_0y_t + \omega_1y_{t-1} + \omega_2y_{t-2} + \dots + \omega_ky_{t-k}$
- Természetesen  $\omega(L)$  maga is egy operátor

# A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például

$$2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2y_t = \dots$$

- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\dots = (2 + 3L - 4L^2) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását:  $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$  épp az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra pont  $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2}$ -t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1L + \omega_2L^2 + \dots + \omega_kL^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárthatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel  $\omega(L)y_t = \omega_0y_t + \omega_1y_{t-1} + \omega_2y_{t-2} + \dots + \omega_ky_{t-k}$
- Természetesen  $\omega(L)$  maga is egy operátor

# A késleltetési polinom használatának előnye

Számos – egyébként bonyolult – művelet elvégezhető, mint (jól ismert) manipuláció polinomokkal: összeszorozhatóak, invertálhatóak stb.!

# Tartalom

- 1 Matematikai emlékeztető
  - Algebra emlékeztető
  
- 2 Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája
  - A késleltetési operátor és a késleltetési polinom
  - ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

# ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Emlékeztőül:

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \\ + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

- Kicsit átrendezve:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \\ \alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

# ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Emlékeztőül:

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \\ + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

- Kicsit átrendezve:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \\ \alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

# ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Az előbbieket alapján ez átírható mint

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t &= \\ = \alpha + u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t + \dots + \theta_q L^q u_t & \end{aligned}$$

- Azaz:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t &= \\ = \alpha + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) u_t & \end{aligned}$$

- Vezessünk be két késleltetési polinomot:  $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p$  és  $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_q x^q$
- Ezekkel az előbbi egész egyszerűen

$$\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$



# ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Az előbbieket alapján ez átírható mint

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t &= \\ = \alpha + u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t + \dots + \theta_q L^q u_t & \end{aligned}$$

- Azaz:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t &= \\ = \alpha + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) u_t & \end{aligned}$$

- Vezessünk be két késleltetési polinomot:  $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p$  és  $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_q x^q$
- Ezekkel az előbbi egész egyszerűen

$$\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$

# ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Az előbbieket alapján ez átírható mint

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t &= \\ = \alpha + u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t + \dots + \theta_q L^q u_t & \end{aligned}$$

- Azaz:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t &= \\ = \alpha + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) u_t & \end{aligned}$$

- Vezessünk be két késleltetési polinomot:  $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p$  és  $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_q x^q$
- Ezekkel az előbbi egész egyszerűen

$$\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$

# ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Az előbbieket alapján ez átírható mint

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t &= \\ = \alpha + u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t + \dots + \theta_q L^q u_t & \end{aligned}$$

- Azaz:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t &= \\ = \alpha + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) u_t & \end{aligned}$$

- Vezessünk be két késleltetési polinomot:  $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p$  és  $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_q x^q$
- Ezekkel az előbbi egész egyszerűen

$$\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L)\alpha + \phi^{-1}(L)\theta(L)u_t$$

- Legalábbis, ha  $\phi(L)$  invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik  $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L)\alpha + \phi^{-1}(L)\theta(L)u_t$$

- Legalábbis, ha  $\phi(L)$  invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az  $L$  úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormója)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik  $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L)\alpha + \phi^{-1}(L)\theta(L)u_t$$

- Legalábbis, ha  $\phi(L)$  invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az  $L$  úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik  $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L) \alpha + \phi^{-1}(L) \theta(L) u_t$$

- Legalábbis, ha  $\phi(L)$  invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az  $L$  úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik  $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L) \alpha + \phi^{-1}(L) \theta(L) u_t$$

- Legalábbis, ha  $\phi(L)$  invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az  $L$  úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik  $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)



# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L) \alpha + \phi^{-1}(L) \theta(L) u_t$$

- Legalábbis, ha  $\phi(L)$  invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az  $L$  úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik  $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L) \alpha + \phi^{-1}(L) \theta(L) u_t$$

- Legalábbis, ha  $\phi(L)$  invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az  $L$  úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik  $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: invertálhatóság

- Ha viszont  $\theta(L)$  gyökei vannak az egységkörön kívül, akkor az egész  $AR(\infty)$ -folyamatként reprezentálható
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy a folyamat *invertálható*
- Lényegében azt jelenti, hogy az  $u_t$  is felírható  $Y$  aktuális és múltbeli értékeivel (nem csak fordítva)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: invertálhatóság

- Ha viszont  $\theta(L)$  gyökei vannak az egységkörön kívül, akkor az egész  $AR(\infty)$ -folyamatként reprezentálható
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy a folyamat *invertálható*
- Lényegében azt jelenti, hogy az  $u_t$  is felírható  $Y$  aktuális és múltbeli értékeivel (nem csak fordítva)

# ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: invertálhatóság

- Ha viszont  $\theta(L)$  gyökei vannak az egységkörön kívül, akkor az egész  $AR(\infty)$ -folyamatként reprezentálható
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy a folyamat *invertálható*
- Lényegében azt jelenti, hogy az  $u_t$  is felírható  $Y$  aktuális és múltbeli értékeivel (nem csak fordítva)