Késleltetési operátor és polinom, ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinommal, az ARMA-folyamatok stacionaritása

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 12.

Tartalom

Tartalomjegyzék

1. Matematikai emlékeztető

1.1. Algebra emlékeztető

Változó, hatvány, polinom, polinom gyöke és inverze

- Legyen x egy változó, x^k egy hatványa, ekkor $\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \ldots + \omega_k x^k = \omega\left(x\right)$ egy – k-ad fokú, egyváltozós – polinom, $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ együtthatókkal
- (Az együtthatók és a változó értéke legegyszerűbb esetben valós számok, de ez nem szükségszerű)
- Megengedjük, hogy a fokszám végtelen is lehessen: $\omega\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i x^i$
- Polinom inverze: $\omega^{-1}\left(x\right)$ olyan, hogy $\omega^{-1}\left(x\right)\omega\left(x\right) = 1$

- Polinom gyöke: az $\omega(x) = 0$ egyenlet megoldása
- Az algebra alaptétele: egy k-ad fokú valós polinomnak k darab – nem feltétlenül különböző – gyöke van, melyek vagy valósak, vagy ha komplexek, akkor konjugált párokban jönnek
- Az előbbi miatt egy polinom mindig felírható úgy – gyöktényezős alak – mint $\omega(x) = \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right)\left(1 - \frac{1}{r_2}x\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)$, ahol r_i az i-edik gyök

Polinom invertálása

- Például $1 - ax$ inverze $1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \ldots$ (egyesével egyeztetve az együtthatókat)
- Ez egy hatványsor, konvergál, ha $|ax| < 1$
- Általános esethez induljunk ki a gyöktényezős alakból:

$$\begin{aligned}
\omega^{-1}(x) &= \left[\left(1 - \frac{1}{r_1}x\right)\left(1 - \frac{1}{r_2}x\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)\right]^{-1} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{r_2}x\right)^{-1}\cdots\left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)^{-1} = \\
&= \prod_{i=1}^{k}\left[1 + \frac{1}{r_i}x + \left(\frac{1}{r_i}x\right)^2 + \left(\frac{1}{r_i}x\right)^3 + \ldots\right]
\end{aligned}$$

- Ami konvergál, ha minden i-re $\left|\frac{1}{r_i}x\right| < 1$
  - Ha $|x| = 1$, akkor a feltétel, hogy $|r_i| > 1$, azaz, hogy mindegyik gyök 1-nél nagyobb abszolútértékű legyen, más szóval, hogy a komplex egységkörön kívül legyen (ugye a gyökök komplexek is lehetnek)

2. Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája

2.1. A késleltetési operátor és a késleltetési polinom

A késleltetési operátor

- Legyen L valami, ami idősorból egy másik idősort csinál (ha y az eredeti idősor, akkor Ly jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre

- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel: $y : \{1, 2, \ldots, T\} \to \mathbb{R}$ és $y : t \mapsto y_t$
- Az L tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ($\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_T \end{pmatrix}^T$)
- (Ez rendben is van: egy n dimenziós valós vektor felfogható egy $\{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az n-dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

A késleltetési operátor (precízebben)

- Ha a vektoros felfogást, és azon belül is az n-dimenziós valós vektoroknak való megfeleltetést vesszük, akkor minden operátor reprezentálható mátrixszal (hiszen a mátrix az, ami vektorból vektort csinál!)
- Ez alól a késleltetési operátor sem kivétel, például:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

- (Azért, hogy ne változzon az idősor hossza, az új első eleme legyen fixen 0)

A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda L^2?
- Könnyen értelmezhető: $L\left(Ly_t\right) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden: $L^2 y_t = y_{t-2}$

- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az $\mathbf{L}$ mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítsa meg, azaz $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan $L^k y_t = y_{t-k}$, tehát ez a k-val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például $L^{-1} y_t = y_{t+1}$, „siettető operátor")

A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2 y_t = \ldots$
- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint
$$\ldots = \left(2 + 3L - 4L^2\right) y_t$$
- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció", az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását: $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$ *épp* az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra *pont* $2y_t + 3y_{t_1} - 4y_{t-2}$-t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:
$$\omega\left(L\right) = \omega_0 + \omega_1 L + \omega_2 L^2 + \ldots + \omega_k L^k,$$
azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárhatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből
- Ezzel $\omega\left(L\right) y_t = \omega_0 y_t + \omega_1 y_{t-1} + \omega_2 y_{t-2} + \ldots + \omega_k y_{t-k}$
- Természetesen $\omega\left(L\right)$ maga is egy operátor

A késleltetési polinom használatának előnye

Számos – egyébként bonyolult – művelet elvégezhető, mint (jól ismert) manipuláció polinomokkal: összeszorozhatóak, invertálhatóak stb.!

2.2. ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Emlékezetőül:
$$\begin{gathered} Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \\ + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q} \end{gathered}$$
- Kicsit átrendezve:
$$\begin{gathered} Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \\ \alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q} \end{gathered}$$

ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Az előbbiek alapján ez átírható mint

$$Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \ldots - \phi_p L^p Y_t = \\ = \alpha + u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t + \ldots + \theta_q L^q u_t$$

- Azaz:

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p\right) Y_t = \\ = \alpha + \left(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q\right) u_t$$

- Vezessünk be két késleltetési polinomot: $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \ldots - \phi_p x^p$ és $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \ldots + \theta_q x^q$
- Ezekkel az előbbi egész egyszerűen

$$\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$

ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L)\alpha + \phi^{-1}(L)\theta(L) u_t$$

- Legalábbis, ha $\phi(L)$ invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az L úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik MA(∞)-reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: invertálhatóság

- Ha viszont $\theta(L)$ gyökei vannak az egységkörön kívül, akkor az egész AR(∞)-folyamatként reprezentálható
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy a folyamat *invertálható*
- Lényegében azt jelenti, hogy az u_t is felírható Y aktuális és múltbeli értékeivel (nem csak fordítva)