

Késleltetési operátor és polinom, ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinommal, az ARMA-folyamatok stacionaritása

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 12.

Tartalom

- 1 Matematikai emlékeztető
 - Algebra emlékeztető

- 2 Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája
 - A késleltetési operátor és a késleltetési polinom
 - ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

Változó, hatvány, polinom, polinom gyöke és inverze

- Legyen x egy változó, x^k egy hatványa, ekkor $\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots + \omega_k x^k = \omega(x)$ egy k -ad fokú, egyváltozós – polinom, $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ együtthatókkal
- (Az együtthatók és a változó értéke legegyszerűbb esetben valós számok, de ez nem szükségszerű)
- Megengedjük, hogy a fokszám végtelen is lehessen: $\omega(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i x^i$
- Polinom inverze: $\omega^{-1}(x)$ olyan, hogy $\omega^{-1}(x)\omega(x) = 1$
- Polinom gyöke: az $\omega(x) = 0$ egyenlet megoldása
- Az algebra alaptétele: egy k -ad fokú valós polinomnak k darab – nem feltétlenül különböző – gyöke van, melyek vagy valósak, vagy ha komplexek, akkor konjugált párokban jönnek
- Az előbbi miatt egy polinom mindig felírható úgy – gyöktényezős alak – mint $\omega(x) = \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right) \left(1 - \frac{1}{r_2}x\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)$, ahol r_i az i -edik gyök

Polinom invertálása

- Például $1 - ax$ inverze $1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \dots$ (egyesével egyeztetve az együtthatókat)
- Ez egy hatványsor, konvergál, ha $|ax| < 1$
- Általános esethez induljunk ki a gyöktényezős alakból:

$$\begin{aligned}\omega^{-1}(x) &= \left[\left(1 - \frac{1}{r_1}x\right) \left(1 - \frac{1}{r_2}x\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r_k}x\right) \right]^{-1} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{r_2}x\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)^{-1} = \\ &= \prod_{i=1}^k \left[1 + \frac{1}{r_i}x + \left(\frac{1}{r_i}x\right)^2 + \left(\frac{1}{r_i}x\right)^3 + \dots \right]\end{aligned}$$

- Ami konvergál, ha minden i -re $\left|\frac{1}{r_i}x\right| < 1$
 - Ha $|x| = 1$, akkor a feltétel, hogy $|r_i| > 1$, azaz, hogy mindegyik gyök 1-nél nagyobb abszolútértékű legyen, más szóval, hogy a komplex egységkörön kívül legyen (ugye a gyökök komplexek is lehetnek)

A késleltetési operátor

- Legyen L valami, ami idősróból egy másik idősort csinál (ha y az eredeti idősor, akkor Ly jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre
- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel:
 $y : \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}$ és $y : t \mapsto y_t$
- Az L tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ($\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_T)^T$)
- (Ez rendben is van: egy n dimenziós valós vektor felfogható egy $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni
- A fenti esetben ez megfelel az n -dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

A késleltetési operátor (precízebben)

- Ha a vektoros felfogást, és azon belül is az n -dimenziós valós vektoroknak való megfeleltetést vesszük, akkor minden operátor reprezentálható mátrixszal (hiszen a mátrix az, ami vektorból vektort csinál!)
- Ez alól a késleltetési operátor sem kivétel, például:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

- (Azért, hogy ne változzon az idősor hossza, az új első eleme legyen fixen 0)

A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda L^2 ?
- Könnyen értelmezhető: $L(Ly_t) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden: $L^2y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az \mathbf{L} mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítja meg, azaz $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan $L^k y_t = y_{t-k}$, tehát ez a k -val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például $L^{-1}y_t = y_{t+1}$, „siettető operátor”)

A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például

$$2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2y_t = \dots$$

- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\dots = (2 + 3L - 4L^2) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását: $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$ épp az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra pont $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2}$ -t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1L + \omega_2L^2 + \dots + \omega_kL^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárthatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel $\omega(L)y_t = \omega_0y_t + \omega_1y_{t-1} + \omega_2y_{t-2} + \dots + \omega_ky_{t-k}$
- Természetesen $\omega(L)$ maga is egy operátor

A késleltetési polinom használatának előnye

Számos – egyébként bonyolult – művelet elvégezhető, mint (jól ismert) manipuláció polinomokkal: összeszorozhatóak, invertálhatóak stb.!

ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Emlékeztőül:

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \\ + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

- Kicsit átrendezve:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \\ \alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Az előbbieket alapján ez átírható mint

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t &= \\ = \alpha + u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t + \dots + \theta_q L^q u_t & \end{aligned}$$

- Azaz:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t &= \\ = \alpha + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) u_t & \end{aligned}$$

- Vezessünk be két késleltetési polinomot: $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p$ és $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_q x^q$
- Ezekkel az előbbi egész egyszerűen

$$\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$

ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L) \alpha + \phi^{-1}(L) \theta(L) u_t$$

- Legalábbis, ha $\phi(L)$ invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
 - Mert az L úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik $MA(\infty)$ -reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: invertálhatóság

- Ha viszont $\theta(L)$ gyökei vannak az egységkörön kívül, akkor az egész $AR(\infty)$ -folyamatként reprezentálható
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy a folyamat *invertálható*
- Lényegében azt jelenti, hogy az u_t is felírható Y aktuális és múltbeli értékeivel (nem csak fordítva)