Determinisztikus idősorelemzés, dekompozíciós idősormodellek: trend, szezonalitás és ciklus

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 12.

Tartalom

Tartalom

Tartalom

A determinisztikus idősorelemzés

- Az idősor alakulása *elvileg* függvényszerűen felírható bizonyos tényezők alapján
- Csak azért nem tudjuk tökéletesen megtenni, mert nem ismerjük e tényezőket, nem tudjuk milyen függvényformával hatnak, nem tudjuk pontosan mérni stb. ezért fogunk hibázni
- De pont: a hibának *csak* ennyi szerepe van...
- ...beállítja az aktuális időszaki értéket, *és kész*

A determinisztikus idősorelemzés

- Az idősor alakulása *elvileg* függvényszerűen felírható bizonyos tényezők alapján
- Csak azért nem tudjuk tökéletesen megtenni, mert nem ismerjük e tényezőket, nem tudjuk milyen függvényformával hatnak, nem tudjuk pontosan mérni stb. ezért fogunk hibázni
- De pont: a hibának *csak* ennyi szerepe van...
- ...beállítja az aktuális időszaki értéket, *és kész*

A determinisztikus idősorelemzés

- Az idősor alakulása *elvileg* függvényszerűen felírható bizonyos tényezők alapján
- Csak azért nem tudjuk tökéletesen megtenni, mert nem ismerjük e tényezőket, nem tudjuk milyen függvényformával hatnak, nem tudjuk pontosan mérni stb. ezért fogunk hibázni
- De pont: a hibának *csak* ennyi szerepe van...
- ...beállítja az aktuális időszaki értéket, *és kész*

A determinisztikus idősorelemzés

- Az idősor alakulása *elvileg* függvényszerűen felírható bizonyos tényezők alapján
- Csak azért nem tudjuk tökéletesen megtenni, mert nem ismerjük e tényezőket, nem tudjuk milyen függvényformával hatnak, nem tudjuk pontosan mérni stb. ezért fogunk hibázni
- De pont: a hibának *csak* ennyi szerepe van...
- ...beállítja az aktuális időszaki értéket, *és kész*

Dekompozíciós idősormodellek

- Minderre a legtipikusabb – és egyben legklasszikusabb – példát a **dekompozíciós idősormodellek** jelentik
- A legismertebb additív modell:

$$Y_t = R_t + C_t + S_t + u_t,$$

ahol R_t, C_t és S_t a trend, a ciklus és a szezonalitás t-edik időszakbeli értéke rendre, u_t pedig a már említett eltérésváltozó

- Becslés?

Dekompozíciós idősormodellek

- Minderre a legtipikusabb – és egyben legklasszikusabb – példát a **dekompozíciós idősormodellek** jelentik
- A legismertebb additív modell:

$$Y_t = R_t + C_t + S_t + u_t,$$

  ahol R_t, C_t és S_t a trend, a ciklus és a szezonalitás t-edik időszakbeli értéke rendre, u_t pedig a már említett eltérésváltozó
- Becslés?

Dekompozíciós idősormodellek

- Minderre a legtipikusabb – és egyben legklasszikusabb – példát a **dekompozíciós idősormodellek** jelentik
- A legismertebb additív modell:

$$Y_t = R_t + C_t + S_t + u_t,$$

  ahol R_t, C_t és S_t a trend, a ciklus és a szezonalitás t-edik időszakbeli értéke rendre, u_t pedig a már említett eltérésváltozó
- Becslés?

Tartalom

Regresszió alkalmazása

- Az előbbi modell teljesen természetesen becsülhető regresszióval, ha R_t, C_t és S_t helyébe beírjuk a feltételezett – paraméteres – függvényformákat
- (Most tehát mindvégig paraméteres regressziót fogunk használni)
- Legegyszerűbb eset: $R_t = \alpha + \beta t$, $C_t = 0$ és $S_t = 0$ (egyszerű lineáris trend)
- Az így kapott modell OLS-sel becsülhető

Regresszió alkalmazása

- Az előbbi modell teljesen természetesen becsülhető regresszióval, ha R_t, C_t és S_t helyébe beírjuk a feltételezett – paraméteres – függvényformákat
- (Most tehát mindvégig paraméteres regressziót fogunk használni)
- Legegyszerűbb eset: $R_t = \alpha + \beta t$, $C_t = 0$ és $S_t = 0$ (egyszerű lineáris trend)
- Az így kapott modell OLS-sel becsülhető

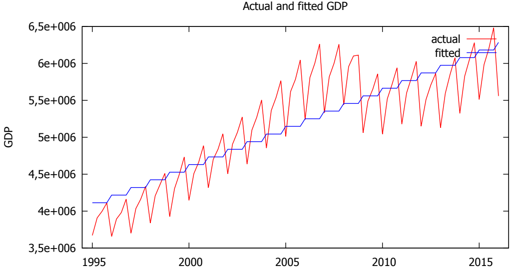
Regresszió alkalmazása

- Az előbbi modell teljesen természetesen becsülhető regresszióval, ha R_t, C_t és S_t helyébe beírjuk a feltételezett – paraméteres – függvényformákat
- (Most tehát mindvégig paraméteres regressziót fogunk használni)
- Legegyszerűbb eset: $R_t = \alpha + \beta t$, $C_t = 0$ és $S_t = 0$ (egyszerű lineáris trend)
- Az így kapott modell OLS-sel becsülhető

Regresszió alkalmazása

- Az előbbi modell teljesen természetesen becsülhető regresszióval, ha R_t, C_t és S_t helyébe beírjuk a feltételezett – paraméteres – függvényformákat
- (Most tehát mindvégig paraméteres regressziót fogunk használni)
- Legegyszerűbb eset: $R_t = \alpha + \beta t$, $C_t = 0$ és $S_t = 0$ (egyszerű lineáris trend)
- Az így kapott modell OLS-sel becsülhető

Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel I.

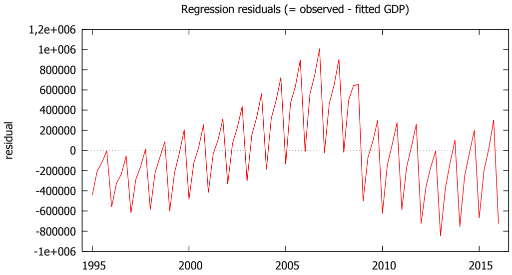


	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	−2,02165e+008	1,50629e+007	−13,4214	0,0000
EV	103398,	7512,17	13,7641	0,0000

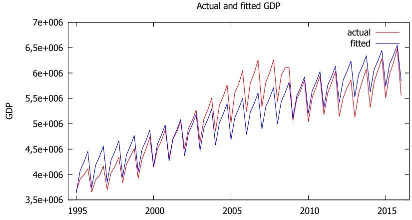
Mean dependent var	5161052	S.D. dependent var	765270,3
Sum squared resid	1,50e+13	S.E. of regression	424924,3
R^2	0,695356	Adjusted R^2	0,691686
$F(1, 83)$	189,4494	P-value(F)	3,94e−23
Log-likelihood	−1221,169	Akaike criterion	2446,339
Schwarz criterion	2451,224	Hannan–Quinn	2448,304
$\hat{\rho}$	0,315141	Durbin–Watson	1,343686

Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel II.

Mi ezzel a baj? Hibatag jól specifikált? Aligha!



Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel és szezonalitással I.

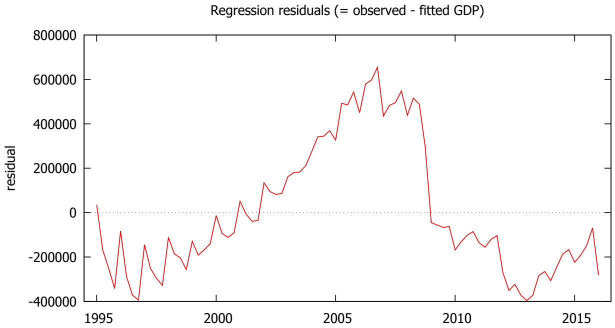


	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	−2,04994e+008	1,06300e+007	−19,2845	0,0000
EV	104985,	5301,64	19,8024	0,0000
DNEGYEDEV_1	−815807,	91469,3	−8,9189	0,0000
DNEGYEDEV_2	−375072,	92487,9	−4,0554	0,0001
DNEGYEDEV_3	−203380,	92487,9	−2,1990	0,0308

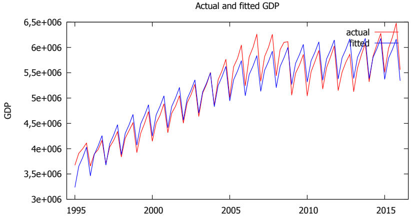
Mean dependent var	5161052	S.D. dependent var	765270,3
Sum squared resid	7,19e+12	S.E. of regression	299695,1
R^2	0,853937	Adjusted R^2	0,846634
$F(4, 80)$	116,9271	P-value(F)	1,34e−32
Log-likelihood	−1189,928	Akaike criterion	2389,855
Schwarz criterion	2402,068	Hannan–Quinn	2394,768
$\hat{\rho}$	0,946516	Durbin–Watson	0,116617

Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel és szezonalitással II.

A szezonalitás jónak tűnik, de az alaptrendet még mindig nem sikerült megragadni:



Negyedéves GDP (éves) kvadratikus trenddel és szezonalitással I.

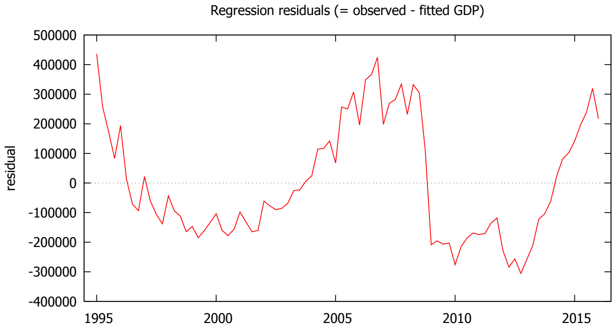


	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	−2,60273e+010	2,61365e+009	−9,9582	0,0000
EV	2,58613e+007	2,60697e+006	9,9201	0,0000
DNEGYEDEV_1	−792077,	61608,7	−12,8566	0,0000
DNEGYEDEV_2	−375072,	62247,4	−6,0255	0,0000
DNEGYEDEV_3	−203380,	62247,4	−3,2673	0,0016
sq_EV	−6422,59	650,072	−9,8798	0,0000

Mean dependent var	5161052	S.D. dependent var	765270,3
Sum squared resid	3,21e+12	S.E. of regression	201704,8
R^2	0,934664	Adjusted R^2	0,930529
$F(5, 79)$	226,0280	P-value(F)	2,80e−45
Log-likelihood	−1155,736	Akaike criterion	2323,473
Schwarz criterion	2338,128	Hannan–Quinn	2329,368
$\hat{\rho}$	0,889365	Durbin–Watson	0,173391

Negyedéves GDP (éves) kvadratikus trenddel és szezonalitással II.

Reziduumok kicsit jobbak:



Mindezek limitációi

- *Egyrészt* el kell találni a függvényformát
- Persze modelldiagnosztika (az előbb látott grafikus módszerek és tesztek is) ott van
- (Ez igazából már keresztmetszetnél is így volt)
- Pl. a kvadratikus nyilván csak erre az időszakra jó, az általánosítóképessége botrányos lenne
- *Másrészt* a hibatag diagnosztikája bonyolultabbá válik, egy új szempont is megjelenik (autokorreláció) $\rightarrow$ később még nagyon sokat fogunk róla beszélni

Mindezek limitációi

- *Egyrészt* el kell találni a függvényformát
- Persze modelldiagnosztika (az előbb látott grafikus módszerek és tesztek is) ott van
- (Ez igazából már keresztmetszetnél is így volt)
- Pl. a kvadratikus nyilván csak erre az időszakra jó, az általánosítóképessége botrányos lenne
- *Másrészt* a hibatag diagnosztikája bonyolultabbá válik, egy új szempont is megjelenik (autokorreláció) $\rightarrow$ később még nagyon sokat fogunk róla beszélni

Mindezek limitációi

- *Egyrészt* el kell találni a függvényformát
- Persze modelldiagnosztika (az előbb látott grafikus módszerek és tesztek is) ott van
- (Ez igazából már keresztmetszetnél is így volt)
- Pl. a kvadratikus nyilván csak erre az időszakra jó, az általánosítóképessége botrányos lenne
- *Másrészt* a hibatag diagnosztikája bonyolultabbá válik, egy új szempont is megjelenik (autokorreláció) $\rightarrow$ később még nagyon sokat fogunk róla beszélni

Mindezek limitációi

- *Egyrészt* el kell találni a függvényformát
- Persze modelldiagnosztika (az előbb látott grafikus módszerek és tesztek is) ott van
- (Ez igazából már keresztmetszetnél is így volt)
- Pl. a kvadratikus nyilván csak erre az időszakra jó, az általánosítóképessége botrányos lenne
- *Másrészt* a hibatag diagnosztikája bonyolultabbá válik, egy új szempont is megjelenik (autokorreláció) → később még nagyon sokat fogunk róla beszélni

Mindezek limitációi

- *Egyrészt* el kell találni a függvényformát
- Persze modelldiagnosztika (az előbb látott grafikus módszerek és tesztek is) ott van
- (Ez igazából már keresztmetszetnél is így volt)
- Pl. a kvadratikus nyilván csak erre az időszakra jó, az általánosítóképessége botrányos lenne
- *Másrészt* a hibatag diagnosztikája bonyolultabbá válik, egy új szempont is megjelenik (autokorreláció) $\rightarrow$ később még nagyon sokat fogunk róla beszélni

Tartalom

A trend megadása

- **Trend**: „hosszú távú alapirányzat”
- A mostani trend (determinisztikus trend) bármi lehet, amit paraméteres függvényformában megadunk; például:
  - Lineáris trend: $a + bt$
  - Kvadratikus trend: $a + b_1 t + b_2 t^2$
  - Polinomiális trend: $a + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k$
  - Exponenciális trend: ae^{bt}
  - Aszimptotikus trend: $c + \frac{1}{a+bt}$
  - Logisztikus trend: $\frac{1}{c+e^{a+bt}}$
  - stb. stb.
- (Persze amelyik nem lineáris, ott vagy linearizálni kell vagy – ha ez nem lehetséges – akkor nem OLS-sel becsülni)
- Ezek mind paraméteres trendek voltak, elképzelhető nem-paraméteres trend is, a legismertebb a spline-ok használata (de ne feledjük, annak a becslése kevésbé hatásos, nem kapunk egyetlen vagy néhány számba sűrített – és jó esetben tárgyterületileg értelmezhető – eredményt, valamint az előrejelzés is problémásabb)

A trend megadása

- **Trend**: „hosszú távú alapirányzat”
- A mostani trend (determinisztikus trend) bármi lehet, amit paraméteres függvényformában megadunk; például:
  - Lineáris trend: $a + bt$
  - Kvadratikus trend: $a + b_1 t + b_2 t^2$
  - Polinomiális trend: $a + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k$
  - Exponenciális trend: ae^{bt}
  - Aszimptotikus trend: $c + \frac{1}{a+bt}$
  - Logisztikus trend: $\frac{1}{c+e^{a+bt}}$
  - stb. stb.
- (Persze amelyik nem lineáris, ott vagy linearizálni kell vagy – ha ez nem lehetséges – akkor nem OLS-sel becsülni)
- Ezek mind paraméteres trendek voltak, elképzelhető nem-paraméteres trend is, a legismertebb a spline-ok használata (de ne feledjük, annak a becslése kevésbé hatásos, nem kapunk egyetlen vagy néhány számba sűrített – és jó esetben tárgyterületileg értelmezhető – eredményt, valamint az előrejelzés is problémásabb)

A trend megadása

- **Trend**: „hosszú távú alapirányzat"
- A mostani trend (determinisztikus trend) bármi lehet, amit paraméteres függvényformában megadunk; például:
  - Lineáris trend: $a + bt$
  - Kvadratikus trend: $a + b_1 t + b_2 t^2$
  - Polinomiális trend: $a + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k$
  - Exponenciális trend: ae^{bt}
  - Aszimptotikus trend: $c + \frac{1}{a+bt}$
  - Logisztikus trend: $\frac{1}{c+e^{a+bt}}$
  - stb. stb.
- (Persze amelyik nem lineáris, ott vagy linearizálni kell vagy – ha ez nem lehetséges – akkor nem OLS-sel becsülni)
- Ezek mind paraméteres trendek voltak, elképzelhető nem-paraméteres trend is, a legismertebb a spline-ok használata (de ne feledjük, annak a becslése kevésbé hatásos, nem kapunk egyetlen vagy néhány számba sűrített – és jó esetben tárgyterületileg értelmezhető – eredményt, valamint az előrejelzés is problémásabb)

A trend megadása

- **Trend**: „hosszú távú alapirányzat”
- A mostani trend (determinisztikus trend) bármi lehet, amit paraméteres függvényformában megadunk; például:
  - Lineáris trend: $a + bt$
  - Kvadratikus trend: $a + b_1 t + b_2 t^2$
  - Polinomiális trend: $a + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k$
  - Exponenciális trend: ae^{bt}
  - Aszimptotikus trend: $c + \frac{1}{a+bt}$
  - Logisztikus trend: $\frac{1}{c+e^{a+bt}}$
  - stb. stb.
- (Persze amelyik nem lineáris, ott vagy linearizálni kell vagy – ha ez nem lehetséges – akkor nem OLS-sel becsülni)
- Ezek mind paraméteres trendek voltak, elképzelhető nem-paraméteres trend is, a legismertebb a spline-ok használata (de ne feledjük, annak a becslése kevésbé hatásos, nem kapunk egyetlen vagy néhány számba sűrített – és jó esetben tárgyterületileg értelmezhető – eredményt, valamint az előrejelzés is problémásabb)

Szezonalitás megadása

- **Szezonalitás**: „éven belüli mintázat”, exogén módon rögzített hosszúságú, periodikus (vs. **ciklus**: „éven túli”, nem feltétlenül exogén módon adott, ismert hosszúságú)
- A szezonalitásnál viszont tipikusabb a nem-paraméteres megadás: minden negyedévnek (hónapnak, félévnek stb.) saját paramétere van
- (Dummy-kkal, ld. később, regressziós keretbe szintén szépen illeszkednek!)
- Persze itt is elképzelhető paraméteres megadás, a legismertebb a trigonometrikus (harmonikus) függvények használata

Szezonalitás megadása

- **Szezonalitás**: „éven belüli mintázat”, exogén módon rögzített hosszúságú, periodikus (vs. **ciklus**: „éven túli”, nem feltétlenül exogén módon adott, ismert hosszúságú)
- A szezonalitásnál viszont tipikusabb a nem-paraméteres megadás: minden negyedévnek (hónapnak, félévnek stb.) saját paramétere van
- (Dummy-kkal, ld. később, regressziós keretbe szintén szépen illeszkednek!)
- Persze itt is elképzelhető paraméteres megadás, a legismertebb a trigonometrikus (harmonikus) függvények használata

Szezonalitás megadása

- **Szezonalitás**: „éven belüli mintázat”, exogén módon rögzített hosszúságú, periodikus (vs. **ciklus**: „éven túli”, nem feltétlenül exogén módon adott, ismert hosszúságú)
- A szezonalitásnál viszont tipikusabb a nem-paraméteres megadás: minden negyedévnek (hónapnak, félévnek stb.) saját paramétere van
- (Dummy-kkal, ld. később, regressziós keretbe szintén szépen illeszkednek!)
- Persze itt is elképzelhető paraméteres megadás, a legismertebb a trigonometrikus (harmonikus) függvények használata

Szezonalitás megadása

- **Szezonalitás**: „éven belüli mintázat”, exogén módon rögzített hosszúságú, periodikus (vs. **ciklus**: „éven túli”, nem feltétlenül exogén módon adott, ismert hosszúságú)
- A szezonalitásnál viszont tipikusabb a nem-paraméteres megadás: minden negyedévnek (hónapnak, félévnek stb.) saját paramétere van
- (Dummy-kkal, ld. később, regressziós keretbe szintén szépen illeszkednek!)
- Persze itt is elképzelhető paraméteres megadás, a legismertebb a trigonometrikus (harmonikus) függvények használata

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: referenciakódolás

- Az egyik szezon indikátorát elhagyjuk: **referenciakódolás**

	D_{Q1}	D_{Q2}	D_{Q3}
Q1	1	0	0
Q2	0	1	0
Q3	0	0	1
Q4	0	0	0

- Értelmezés: eltérés a referenciacsoporthoz képest (ami az elhagyott indikátorú csoport)

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: referenciakódolás

- Az egyik szezon indikátorát elhagyjuk: **referenciakódolás**

	D_{Q1}	D_{Q2}	D_{Q3}
Q1	1	0	0
Q2	0	1	0
Q3	0	0	1
Q4	0	0	0

- Értelmezés: eltérés a referenciacsoporthoz képest (ami az elhagyott indikátorú csoport)

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: kontrasztkódolás I.

- Egy másik népszerű megoldás a **kontrasztkódolás**: viszonyítsunk az *átlaghoz*!
- Ehhez hogyan kell kódolni...?

	C_{Q1}	C_{Q2}	C_{Q3}
Q1	1	0	0
Q2	0	1	0
Q3	0	0	1
Q4	-1	-1	-1

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: kontrasztkódolás I.

- Egy másik népszerű megoldás a **kontrasztkódolás**: viszonyítsunk az *átlaghoz*!
- Ehhez hogyan kell kódolni...?

	C_{Q1}	C_{Q2}	C_{Q3}
Q1	1	0	0
Q2	0	1	0
Q3	0	0	1
Q4	-1	-1	-1

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: kontrasztkódolás II.

Mert:

$$\alpha + \beta_{C_{Q1}} + 0 + 0 = \overline{y}_{Q1} \quad (1)$$

$$\alpha + 0 + \beta_{C_{Q2}} + 0 = \overline{y}_{Q2} \quad (2)$$

$$\alpha + 0 + 0 + \beta_{C_{Q3}} = \overline{y}_{Q3} \quad (3)$$

$$\alpha - \beta_{C_{Q1}} - \beta_{C_{Q2}} - \beta_{C_{Q3}} = \overline{y}_{Q4} \quad (4)$$

És így:

- (1)+(2)+(3)+(4) $\Rightarrow 4\alpha = \overline{y}_{Q1} + \overline{y}_{Q2} + \overline{y}_{Q3} + \overline{y}_{Q4} \Rightarrow \alpha$ tényleg a főátlag (mert azonosak voltak a csoportok elemszámai, különben ún. súlyozott kontraszt kellene)
- (2)+(3)+(4) $\Rightarrow 3\alpha - \beta_{C_{Q1}} = \overline{y}_{Q2} + \overline{y}_{Q3} + \overline{y}_{Q4} \Rightarrow \beta_{C_{Q1}} = 3\alpha - \left(\overline{y}_{Q2} + \overline{y}_{Q3} + \overline{y}_{Q4}\right) = 3\alpha - \left(4\alpha - \overline{y}_{Q1}\right) \Rightarrow \beta_{C_{Q1}} = \overline{y}_{Q1} - \alpha \Rightarrow$ tényleg az átlagtól való eltérés (és hasonlóan a másik kettő)

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: egyebek

- Az angol irodalomban az általunk kontrasztkódolásnak nevezett módszert nagyon gyakran „effect coding”-nak nevezik...
- ... a kontraszt pedig az, amikor a csoportok tetszőleges – általunk meghatározott – lineáris kombinációját teszteljük

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: egyebek

- Az angol irodalomban az általunk kontrasztkódolásnak nevezett módszert nagyon gyakran „effect coding"-nak nevezik...
- ... a kontraszt pedig az, amikor a csoportok tetszőleges – általunk meghatározott – lineáris kombinációját teszteljük