

A stacionaritás és az ergodicitás fogalma

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 12.

Tartalom

- 1 A stacionaritás fogalma, szükségessége
- 2 Idősor-jellemzők mintából becslése

Az alaprobléma

- Egyetlen realizáció problémája
- Hogyan lehet egyetlen mintából bármit megbecsülni? Nyilván sehogy...
- És ezen ráadásul – ugyebár – a hosszabb megfigyelés sem segít
- A megoldás: valamilyen plusz-feltevés kell!

Jön a jótündér

- Mondjuk egy jótündér megsúgja nekünk, hogy minden időpontban (ami ugye egy valószínűségi változó) ugyanaz a várható érték:

$$\mu_t \equiv \mu$$

- ($A \equiv$ természetesen azt jelenti, hogy $\forall t$ -re)
- Ez tehát egyfajta *eltolásinvariancia*; írhattuk volna, teljesen egyenértékűen azt is, hogy $\mu_t = \mu_s$, vagy azt is, hogy $\mu_t = \mu_{t+h}$ (most elég nyakatekert, de később ez lesz a jobb)
- Ekkor már ezt az – immár létező – közös várható értéket, igaz *csak* ezt, de ezt meg tudjuk becsülni mintából!
- Ehhez – de csak ehhez! – „összeönthetőek” a különböző időponthoz tartozó megfigyelések (igazából ehhez még valami további dolog is kell, de erről majd később, most fogadjuk el, hogy megvalósítható)
- Hiszen:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

- Menjünk tovább...

További jótündérek

- Ha $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$ akkor létezik közös szórásnégyzet, és becsülhető: $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \widehat{\mu})^2$ (torzított, de aszimptotikusan torzítatlan, továbbá konzisztens)
- Menjünk tovább...
- Ha létezik az $F_{Y_i} \equiv F$ közös eloszlás, akkor \widehat{F} becsülhető (pl. hisztogrammal)
- Menjünk tovább...
- Két változónál is az eltolásinvarianciát akarjuk megtartani: $\gamma_{t,s}$ legyen ugyanaz mint $\gamma_{t+h,s+h}$
- De gondoljuk végig, ez magyarul azt jelenti, hogy $\gamma_{t,s}$ csak a $t - s$ -től függ!
- Ez esetben becsülhető: $\widehat{\gamma}_k = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \widehat{\mu})(y_{t+k} - \widehat{\mu})$
- Menjünk tovább...
- $F_{Y_t, Y_s} = F_{Y_{t+h}, Y_{s+h}}$, minden s, t, h -ra, akkor a kétváltozós eloszlás komplettül becsülhető

És végül...

- Az utolsó, immár tényleg mindent lefedő szint: $F_{Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k}} = F_{Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_k+h}}$ minden értelmes k -ra, t_1, t_2, \dots, t_k -ra és h -ra
- Ennek a neve: **erős stacionaritás**
- Ez az a feltevés, ami a keresztmetszethez hasonló becülhetőséget tesz lehetővé annak ellenére is, hogy idősorban vagyunk
- A keresztmetszet azért volt egyszerűbb, mert a függetlenséget feltettük, de itt most erről szó nincs: pont az a lényeg, hogy úgy teremtettük meg a keresztmetszethez hasonló becülhetőséget, hogy semmilyen függetlenséget nem kellett feltételeznünk – szerencsére, mert annak ugye nem lenne értelme (persze a függetlenség implikálja az erős stacionaritást)
- Viszont: rengeteget követel, elméleti kezeléshez jó, de gyakorlatban nagyon nehéz ellenőrizni a teljesülését
- Éppen ezért gyengítsük kicsit...

A gyenge stacionaritás

- Mint az erős stacionaritás, de
 - csak $k = 1, 2$ -re
 - teljes eloszlás-egyezőség helyett csak első két momentumban egyezőséget követelünk meg
- Mi adódik ebből?
 - 1 $\mu_t \equiv \mu$
 - 2 $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$
 - 3 $\gamma_{t,s} \equiv \gamma_{t-s}$
- (Valójában a 2. feltétel redundáns, hiszen $\gamma_{t,t} = \sigma_t^2$)
- A továbbiakban, ha mást nem mondunk, stacionaritás alatt mindig ezt a **gyenge (vagy kovariancia-) stacionaritást** értjük

A stacionaritás tesztelése

- A fentiek már adnak egy – teljesen szubjektív – módszert a stacionaritás tesztelésére: nézzünk rá az idősorra, az 1. és 2. feltétel megítélhető
- Ez a „grafikus tesztelés” persze abszolút szubjektív
- Később látni fogunk objektív módszert (statisztikai próbát) is

Egy gondolat a mintából történő becslésekről

- A már látott mintából történő becsléseknél ($\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma}^2$, $\widehat{\gamma}_k$ stb.) ne feledjük el, hogy mindezeket mind terheli a mintavételi ingadozás, az abból fakadó mintavételi hiba
 - ...konfidenciaintervallum szerkeszthető a valódi értékre
 - ...tesztelhető nevezetes értékre vonatkozó hipotézis
- Ez utóbbi tipikus példája az autokorrelálatlanság ($H_0 : \rho_k = 0$ vs. $H_1 : \rho_k \neq 0$)
- Nem túl kis mintaméretnél már jó a normális approximáció: $\widehat{\rho}_k \sim \mathcal{N}(\rho_k, 1/T)$, így

$$\frac{\widehat{\rho}_k}{1/\sqrt{T}} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

Autokorrelálatlanság tesztelése: Ljung–Box-teszt

- Nagyon sok esetben grafikusán is feltüntetik a korrelogramon az autokorrelációra vonatkozó $\pm z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{T}}$ kritikus értékeket
- De vigyázat: ez a *teljes* autokorrelálatlanság ($H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_M = 0$) tesztelésére nem alkalmas!
- (Többszörös összehasonlítások helyzete, α -infláció)
- Legnépszerűbb teszt erre: Ljung–Box-teszt:

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^M \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_M^2$$

- M megválasztása kérdés (ha túl kicsi, elnézhetünk egy magasabbrendű autokorrelációt, ha túl nagy, eltérhetünk a χ^2 eloszlástól)!
- Tipikus alkalmazás majd: modelldiagnosztikában

Autokorrelálatlanság tesztelése: LM-tesztek

- A Ljung–Box-teszttel komoly elméleti agályok vannak (ld. Maddala, 13.5 vagy Hayashi 2.10)
- Ennek ellenére teljesen általánosan használják...
- Lehetséges alternatíva: LM-elvű tesztek, például a Breusch–Godfrey-teszt a már említett modelldiagnosztikai helyzetben