

Kategoriális magyarázó változók

Ferenci Tamás

tamas.ferenci@medstat.hu

2018. február 8.

Tartalom

- 1 Regresszió csak minőségi változóval (ANOVA)
- 2 Regresszió minőségi és mennyiségi magyarázó változóval (ANCOVA)

Minőségi változók a regresszióban

- A kérdés, ami mostani kutatásainkat motiválja: hogyan szerepeltethetünk egy *minőségi* (nominális vagy ordinális) tulajdonságot, pl. férfi/nő, egészséges/beteg, alapfokú/középfokú/felsőfokú végzettségű stb. egy regressziós modellben
- A regresszió csak számszerű adatokat tud felhasználni → valahogy *kódolni* kell a kategoriális tulajdonság lehetséges értékeit (kimeneteit, csoportjait)
- Eddig csak mennyiségi tulajdonságokkal foglalkoztunk, aminek kódolása triviális volt: a naturáliában kifejezett értékével (m^2 , eFt stb.)
- A minőségi változókat úgy kódoljuk, hogy a lehetséges (véges sok!) kimenet mindegyikéhez hozzárendelünk egy egész (ritkábban racionális) számot, pl. a férfi nemet 0-val, a nőt 1-gyel kódoljuk

Dummy változó fogalma

- A kódolást megvalósíthatjuk olyan változóval vagy változókkal, melyek *csak* 0 vagy 1 értéket vehetnek fel
- Az ilyen változókat nevezzük dummy változónak
- Ha két kimenet van, akkor a kódolás teljesen kézenfekvő: egy dummy változóra van szükségünk, mely (például) 0 értéket vesz fel férfira, 1-et nőre
- Bonyolultabb a helyzet, ha több kimenet van

	D_A	D_B	D_C
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1

- Triviális kódolás:
- ... ám vegyük észre, hogy 3 csoporthoz *nem* kell 3 dummy változó, kódolható 2-vel is!

Referencia-kódolás

- Általában k kimenet kódolása megoldható $k - 1$ dummy változóval az ún. referencia-kódolás logikájával
- Itt kiválasztunk egy kimenetet, aminél mind a $k - 1$ darab dummy változó 0 értéket vesz fel (ez az ún. *kontrollcsoport*), és a többi $k - 1$ csoportot az jelzi, hogy a $k - 1$ dummy változó közül *melyik* vesz fel 1 értéket (mindig csak 1!)

	R_A	R_B
A	1	0
B	0	1
C	0	0

- Például (3 kimenetre):
- Itt C a referenciacsoport, R_A és R_B a két szükséges (ugye $k = 3!$) magyarázó változó
- Vegyük észre, hogy $R_A \equiv D_A$ és $R_B \equiv D_B$ (tehát a két kódoláshoz pontosan ugyanazon dummykra van szükség, csak a referencia-kódolásnál eldobjuk az egyiket – ez lesz a kontrollcsoport)

Dummy változó csapda

- Ha van konstans a modellben, akkor *tilos* is k csoporthoz k dummyt használni a kódoláshoz
- Ellenkező esetben egzakt multikollinearitás jön létre (gondoljuk végig, hogy a dummy változókhöz mi tartozik az \mathbf{X} mátrixban, ld. előbb!); ez az ún. *dummy változó csapda*
- További magyarázat: gondoljunk bele, ha mégis lenne konstans és k csoporthoz k darab dummy, akkor k értéket $k + 1$ változóban (konstans + k darab dummy) kéne „eltárolnunk”, ami természetesen nem oldható meg egyértelmű módon
- Ha k csoportot mégis k dummyval kódolunk (a triviális módon), akkor nem szerepeltethetünk konstanst

Dummy változó csapda

- Az előző okfejtésből az is látszik, hogy k kategóriához *kell is* $k - 1$ darab dummy (ha van konstans, különben k darab) \rightarrow különben „nem lenne hol” tárolni a becsült eredményváltozóként visszaadandó értékeket
- A triviális kódolást ritkán használjuk (különösen, mert egynél több kategoriális változó használata esetén nem is létezik – gondoljunk bele, a konstans nem tartozhat egyszerre több változóhoz –, ilyenkor csak a referencia-kódolásnak van értelme)

Triviális kódolás konstans nélkül

- A két kódolási mód (k darab dummy, nincs konstans és $k - 1$ darab dummy, van konstans) jól szemléltethető egy csak a nominális tulajdonsággal magyarázó regresszióval

	D_A	D_B	D_C
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1

- k darab dummy, nincs konstans:

$$Y = \beta_A D_A + \beta_B D_B + \beta_C D_C + \varepsilon$$

- Együtthatók értelmezése?

Referencia-kódolás konstanssal

- $k - 1$ darab dummy, van konstans:

	D_A	D_B
A	1	0
B	0	1
C	0	0

$$Y = \beta^* + \beta_A^* D_A + \beta_B^* D_B + \varepsilon$$

- Együtthatók értelmezése?

A kettő kapcsolata

- Értelmezésnél egy dolgot tartsunk mindig szem előtt: ugyanarra a csoportra ugyanannak az értéknek kell kijönnie, akárhogy kódolunk!
- Így $\beta_C = \beta^*$
- Továbbá (a B csoport példáján):

$$\beta_B = \beta^* + \beta_B^* = \beta_C + \beta_B^*$$

- ... ezért a fenti egyenlet így kell kinézzen:

$$Y = \beta_C + (\beta_A - \beta_C) D_A + (\beta_B - \beta_C) D_B + \varepsilon$$

- Az együtthatók értelmezései eltérnek, de egy adott csoportra becsült érték mindenképp ugyanannyi
- (Jelen esetben a csoportátlag!)
- Vegyük észre, hogy a változónkénti szignifikanciák eltérhetnek (mert másra fognak vonatkozni), de a modellminősítő mutatók nem

Fontos hipotézisvizsgálatok

- Referencia-kódolás esetén a kézenfekvő kérdés, hogy van-e különbség a csoportonkénti értékek (amik ugye itt konstans számok) között (mint az ANOVA-nál)
- Egyrészt: szignifikáns-e egy adott csoportbeli érték eltérése a referenciacsoportétól
- Ez itt nem más, mint β_A^* vagy β_B^* relevanciája
- Egyszerűen t -próbával ellenőrizhető!
- Másrészt: van-e egyáltalán bármilyen csoportok közötti eltérés; ez az ANOVA megfelelője:

$$H_0 : \beta_A^* = \beta_B^* = \dots = 0$$

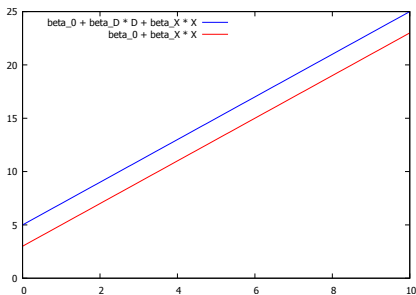
$$H_1 : \exists j : \beta_j^* \neq 0$$

Dummyszás folytonos magyarázó változó jelenléte mellett

- Amit eddig csináltunk az lényegében az volt, amit *konstans dummyszásának* nevezhetünk: csoportonként eltérő (de konstans) értékkel becsültük az eredményváltozót
- Mi van, ha bevonunk egy magyarázó változót?
- Azaz ekkor már nem egy konstans becsülünk az egyes csoportokra, hanem egy egyenest (a folytonos magyarázó változó függvényében)
- Dummyszással (tehát a csoporttagság szerint) eltéríthetjük az egyenesek tengelymetszetét és meredekségét is!
- Lehet csoportonként különböző
 - 1 +1 egység magyarázó változó hatása
 - 2 a 0 magyarázó változóhoz tartozó eredményváltozó
- E feladat neve: ANCOVA

Eltérő tengelymetszet

Ha csak a tengelymetszetet térítjük el (+1 egység magyarázó változó hatása ugyanaz minden csoportban, de nem ugyanannyi a 0 magyarázó változóhoz tartozó eredményváltozó):

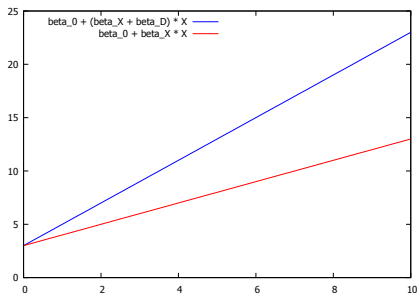


Algebrailag:

$$Y = \beta_0 + \beta_D D + \beta_X X + \varepsilon$$

Eltérő meredekség

Ha csak a meredekséget térítjük el (0 magyarázó változóhoz ugyanaz az eredményváltozó tartozik, de +1 egység magyarázó változó hatása csoportonként eltérő):



Algebrailag:

$$Y = \beta_0 + (\beta_X + \beta_D D) X + \varepsilon$$

Eltérő tengelymetszet és meredekség

- Akár a tengelymetszet és a meredekség is lehet különböző
- Ahogy előbb láttuk, csak a módszereket kell kombinálni: a konstans és a meredekséget is megdummyzzuk
- Az előző két eset (konstans és meredekség dummyzása) így foglalható össze kényelmesen (3 csoportra):

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon,$$

de úgy, hogy $\beta_1 = \alpha + \alpha_A D_A + \alpha_B D_B$ és $\beta_2 = \gamma + \gamma_A D_A + \gamma_B D_B$

- Nagyon fontos észrevenni, hogy a meredekség dummyzása a dummy és a mennyiségi változó közti interakcióra vezet:

$$Y = \alpha + \alpha_A D_A + \alpha_B D_B + \gamma X + \gamma_A (D_A X) + \gamma_B (D_B X) + \varepsilon$$

Eltérő tengelymetszet és meredekség

- De hát ez megoldható a minta szétszedésével is!
- Ellenőrizzük, hogy a két módszer valóban ugyanarra az eredményre vezet
- A dummyzás mégis jobb a minta szétszedésénél; vajon miért?
 - Messzemenően több lehetőségünk van a dummyzott (egybenlévő) modellel → makroökonomiailag releváns hipotézisek vizsgálhatóak egyszerűen (ld. mindjárt)

Hipotézisvizsgálat a dummyzott modellben

- Pl.: van-e egyáltalán bármilyen eltérés a csoportok között? (Értsd: eltér-e a becslt egyenes (bármilyen szempontból) a csoportok között, vagy mindegyikben teljesen ugyanaz?)
- Ez az ún. *strukturális törés*, hipotézispárja:
 $H_0 : \alpha_A = \alpha_B = \gamma_A = \gamma_B = 0$, H_1 : valamelyik ezek közül nem nulla, tehát van strukturális törés
- És most jön a szép rész: ha a fenti modellt megbecsültük (sima OLS-sel), akkor ez a hipotézis egyszerűen egy közös Wald- (vagy hasonló) próbát jelent!
- Hasonlóképp: nem lehet, hogy csak a tengelymetszetek eltérőek? \rightarrow ez az ún. *párhuzamos ráták* hipotézise, $H_0 : \gamma_A = \gamma_B = 0$; szintén Wald-teszttel elintézhető
- Minden hasonló (például makroökonómiailag releváns) kérdés vizsgálata változó vagy változók relevanciájának tesztelésére vezethető vissza

Kontraszt-kódolás

- Kontraszt-kódolás: trükkös kódolás úgy kitalálva, hogy a dummy-k együtthatója ne a referencia-csoporthoz, hanem az átlaghoz képesti eltérést jelentse

	C_A	C_B
A	1	0
B	0	1
C	-1	-1

- A megoldás:
- (A dummy változó nem 0 és 1 értéket vehet csak fel)
- Miért fog ez működni?

Kontraszt-kódolás

Mert:

$$\beta_0 + \beta_{C_A} + 0 = \bar{y}_A \quad (1)$$

$$\beta_0 + 0 + \beta_{C_B} = \bar{y}_B \quad (2)$$

$$\beta_0 - \beta_{C_A} - \beta_{C_B} = \bar{y}_C \quad (3)$$

És így:

- $(1)+(2)+(3) \Rightarrow 3\beta_0 = \bar{y}_A + \bar{y}_B + \bar{y}_C \Rightarrow \beta_0$ tényleg a főátlag (ha azonosak a csoportok elemszámai! különben ún. súlyozott kontraszt kellene, ahol a dummy változók már nem is feltétlenül egész értékeket vennének fel)
- $(2)+(3) \Rightarrow 2\beta_0 - \beta_{C_A} = \bar{y}_B + \bar{y}_C \Rightarrow \beta_{C_A} = 2\beta_0 - (\bar{y}_B + \bar{y}_C) = 2\beta_0 - (3\beta_0 - \bar{y}_A) \Rightarrow \beta_{C_A} = \bar{y}_A - \beta_0 \Rightarrow$ tényleg az átlagtól való eltérés (és hasonlóan a másik)

Egy terminológiai megjegyzés

- Az angol irodalomban az általunk kontrasztkódolásnak nevezett módszert nagyon gyakran „effect coding”-nak nevezik. . .
- . . . a kontraszt pedig az, amikor a csoportok tetszőleges – általunk meghatározott – lineáris kombinációját teszteljük