

A következő statisztikáról részletesebben

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

2018. május 16.

A sokaság és a minta fogalmáról

- „Mennyi a jelenlevők átlagos testtömege?” → *véges* sokaság ($N = 30$), név szerint felsorolhatóak az elemei
- De: „Egy új vérnyomáscsökkentő gyógyszer-jelölt valóban csökkenti a vérnyomást?”
 - Mi itt a sokaság?
 - Ennek nem lehet név szerint felsorolni az elemeit, ez egy absztrakt konstruktum
 - Szokás fiktív sokaságnak hívni (vagy, szintén használt találó névvel, végtelen sokaságnak)
- Általában nem tudjuk az egész sokaságot megfigyelni → *mintavételes helyzet*
- Amit meg tudunk figyelni: *minta*

A problémafelvetés

- Nagyon sok esetben tehát technikai okokból, vagy elvileg is lehetetlen a teljes sokaság megfigyelése
- Csak egy részét, a mintát ismerjük
- És itt jön a kulcsprobléma: *mi mégis a sokaságról akarunk nyilatkozni!*
- Lehet egyáltalán? Hogyan?
- Biztosat már nem tudunk mondani... de valószínűségi állítást igen!

Mintavételi ingadozás

- Ha csak a sokaság egy részét (a mintát) ismerjük, akkor minden belőle számolt jellemző két dologtól fog függeni:
 1. a jellemző sokaságbeli értékétől (a gyógyszer *valódi* hatásától)
 2. attól, hogy konkrétan hogyan választottuk ki a mintát (kik kerültek be a gyógyszer-kísérletbe)
- Mi értelemszerűen az elsőre vagyunk kíváncsiak

- ... csakhogy a – kikerülhetetlen – második („pont milyen mintát vettünk”) azt fogja okozni, hogy minden eredményünk mintáról-mintára változni fog
- *A szerencse:* ez az ún. mintavételi ingadozás követ valószínűségszámítási törvényeket, így valószínűségi állításokat meg tudunk fogalmazni!
- Hibázhatunk, de ennek természetéről tudunk nyilatkozni

Mintavételi hiba

- Figyelem, ennél a hibázásnál nem arról van szó, hogy „rosszul” veszünk mintát: például a legtökéletesebben véletlenszerű mintavételnél is előfordulhat, hogy egy 100 fős sokaságból úgy becsüljük az átlagos testtömeget, hogy pont a 20 legkönnyebbet választjuk ki
- De: ennek a valószínűsége extrém kicsi! (egész pontosan $1/\binom{20}{100} \approx 2 \cdot 10^{-19}\%$)
- Az érzékeltetés kedvéért: ha ekkora valószínűséggel dobunk fejet egy cinkelt pénzérmével, és másodpercenként 1-szer fel tudjuk dobni, akkor az első fej várhatóan 17 ezer milliárd év múlva fog kijönni. . .
- (A trükkös rész: egy konkrét mintánál soha nem tudhatjuk, hogy az véletlenül nem pont az az 1-e, ami átlag 17 ezer milliárd évente egyszer fordul elő!)
- Az egész csak ilyen képzeletbeli ismételt mintavételi értelemben nyer értelmet; ezt a megközelítést szokás frekvencionista statisztikai iskolának nevezni
- Statisztikai apparátus: becslélmélet („konfidenciaintervallumok”) és hipotézisvizsgálat („*p*-értékek”)

Becslélmélet

- Becslőfüggvény (pl. a sokasági átlagot „tippeljük” a minta átlagával)
- Persze tévedhetünk, de reméljük, hogy vannak jó tulajdonságai a becslőfüggvényünkben (torzítatlanság, hatásosság)
- A fentiekkel egyetlen számot, „a” legjobb becslést adjuk vissza eredményként
- Nem adunk számot arról, hogy ebben mekkora a bizonytalanság. . .
- . . . pedig erről is tudunk nyilatkozni! („Kalkulálható bizonytalanság”)
- Tipikus szemléltetés: *konfidenciaintervallum* (CI): mi az a tartomány, amire igaz, hogy ha sokszor megismételjük a mintavételt, és mindegyik mintából megszerkesztenénk a CI-t, akkor ezen CI-k várhatóan 95%-a tartalmazná az igazi (sokasági) értéket (95% megbízhatóság melletti CI)

A konfidenciaintervallumról bővebben

- „Fordított logika” (ezt később is látni fogjuk): nem azt mondjuk, hogy ha ez a minta, akkor hol lehet a valódi érték, hanem, hogy ha ez a valódi érték, akkor hihető-e még, hogy ez jöjjön ki mintaként
- Úgy is szokták mondani, hogy a CI megadja, hogy – ilyen értelemben – mi kompatibilis a mintával
- (Finom különbségnek tűnik, pedig hatalmas jelentősége van, lásd később, a hipotézisvizsgálatnál)
- A „hihetőségre” természetesen határt kell húzni – ez lesz az a bizonyos megbízhatósági szint
- Minden CI szerkesztő eljárásnak vannak előfeltévései (a többi ilyen használók általánosságban szűkebb intervallumot adnak, de ha nem fennálló előfeltételre építünk, akkor invalid lesz a CI, tehát nem 95% lesz a lefedése)
- Nagyobb megbízhatóság \leftrightarrow semmitmondóbb intervallum

A hipotézisvizsgálat alapfogalmai

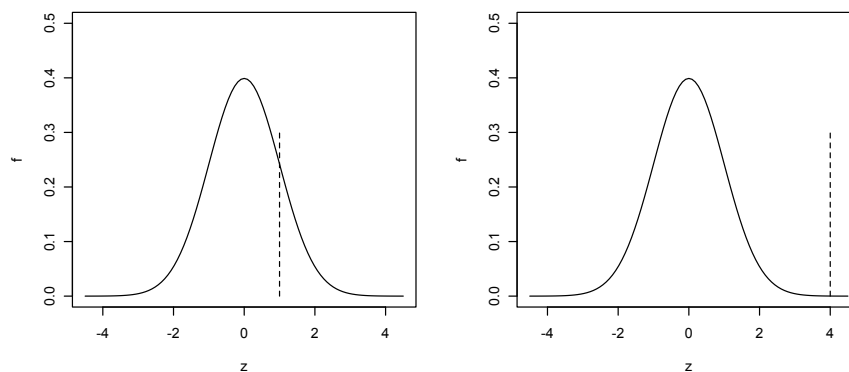
- Feladat: sokaságra vonatkozó állítás eldöntése minta alapján
- Lényegében az intervallumbecslés ikertestvére, de hatalmas gyakorlati jelentősége miatt külön eszköztára van
- Alapeszköze a *statisztikai próba* (vagy teszt), mely a mintaelemek alapján kiszámol egy ún. *tesztstatisztikát* (próbafüggényt)
- Vizsgált állításaink: nullhipotézis – ellenhipotézis
- Egy tipikus példa:

$$H_0 : HR = 1$$

$$H_1 : HR \neq 1$$

Döntés a hipotézisvizsgálatban

- Hihető-e, hogy az empirikus (adott, konkrét mintából kapott) érték ebből az eloszlásból származik?
- Biztos döntés nincs! De: mennyire hihetőek ezek?



Döntés a hipotézisvizsgálatban

- Megint csak, valahol „határt kell húznunk” → szó szerint is!
- Azt mondjuk, hogy a nagyon kis valószínűségű területekre esést már nem hisszük el
- Pedig az *nem* lehetetlen, sőt: az is tudható, hogy az oda esés (azaz a fenti logikával történő hibázás) valószínűsége épp ez a nagyon kis valószínűség
- Tipikus, hogy a felső és alsó szélén is 2,5-2,5 % valószínűségű területet jelölünk ki ($\alpha = 5\%$, ez a szignifikanciaszint), határai: a c_a alsó és a c_f felső kritikus értékek (példában: $\pm 1,96$)

p -érték

- Vagy: Mennyi lenne az a szignifikanciaszint, ami mellett a mintából kapott (empirikus) tesztstatisztika-érték épp az elfogadás és az elutasítás határára kerülne?
- (Ez nem más, mint az empirikus értéktől extrémebb helyeken vett integrálja a mintavételi eloszlásnak)
- A neve: p -érték
- „Az olvasó is tud dönteni”: ha a választott szignifikanciaszint nagyobb, mint a p -érték, akkor elutasítunk, különben elfogadunk
- Ez természetesen ugyanaz, mint a korábban látott definíció: ha fennáll a nullhipotézis (pl. nem hat a gyógyszer), mekkora valószínűséggel kapunk olyat – vagy még extrémebbet – mint amit ténylegesen kaptunk is
- Számos félreértés, lásd mindjárt és filozófiai kérdőjel, lásd később...

Döntés a hipotézisvizsgálatban

- „Fordított logika” (megint csak) a döntéshez: *ha* fennáll a nullhipotézis – nem hat *valójában* a gyógyszer – *akkor* mennyire hihető, hogy a mintában *mégis* hat

- A mintavételi hiba miatt nem nyilvánvaló kérdés: ha a kezelt csoportban 10% halt meg, a kontrollcsoportban pedig 20, attól még lehet, hogy nem hat a gyógyszer – mert a valóságban mindkét csoportban 15% hal meg, de mi pont ilyen mintát vettünk (pusztán a véletlen ingadozás miatt!)
- Ennek a valószínűségét méri a p -érték (precízen: hogy ilyen vagy ennél is extrémebb mintát kapunk, feltéve, hogy fennáll a nullhipotézis)
- Logika: ha ez nagyon kicsi, akkor azt mondjuk, hogy hat a gyógyszer (mert a másik magyarázat, hogy egy nagyon valószínűtlen esemény történt)
- Vigyázat, hipotézisvizsgálatban mindig az elutasítás az erős döntés (nem véletlen, hogy úgy fogalmazunk, hogy „nem tudtuk elvetni” a nullhipotézist, nem úgy, hogy „elfogadtuk”)
- A hiány bizonyítéka nem a bizonyíték hiánya!

Próba hibái

- Elvetjük H_0 -t, pedig fennáll (elsőfajú hiba, α): pontosan szabályozható valószínűségű
- Elfogadjuk H_0 -t, pedig el lehetne vetni (másodfajú hiba, β): általánosságban nem ismert, függ a valóságtól
- $1 - \beta$: próba ereje („mennyire ismeri fel az eltérést, ha tényleg van”)
- Mi két dologgal tudjuk befolyásolni a próba erejét, mindkettőhöz egy-egy tételmondat:
 1. Választott próba: „mindig annyi előfeltevésre építő próbát használjunk, amennyit tudunk, se többet se kevesebbet” (több előfeltevésre építő próbák erősebbek ugyan, de ha szükséges előfeltevés nem teljesül, a próba nem lesz valid)
 2. Mintanagyság: „kis hatáshoz nagy minta kell, nagy hatáshoz elég a kisebb minta is”
 → ha feltételezünk egy eltérést, akkor kiszámítható, hogy annak adott valószínűségű – erejű – kimutatásához hány beteget kell bevonni!